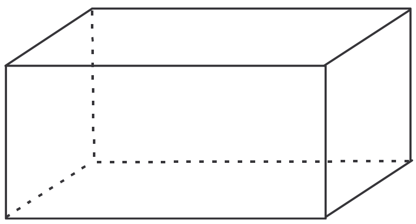
SOLIDES ET VOLUMES

1. OBSERVATION ; DESCRIPTION

- *Un **solide**, au sens géométrique, est un objet limité par des surfaces indéformables. Ces surfaces si elles sont planes sont des **faces**. Mais il y a beaucoup de solides qui n'ont pas de surface plane. La plus évidente est la boule.*
- *L'étude porte cette année sur les solides les plus simples :*
  - *le **pavé** (aussi appelé **parallélépipède rectangle**).*
  - *et un de ses cas particuliers : le **cube**. **Le cube est donc un pavé un peu particulier***

Le Pavé ou parallélépipède rectangle :



Un pavé pourrait être considéré intuitivement comme un empilement de rectangles tous identiques.
C'est ce qui se passe pour un livre par exemple.
Chaque feuille est un rectangle et c'est la quantité de feuilles correctement empilées qui fait apparaître le solide qui a la forme d'un pavé.

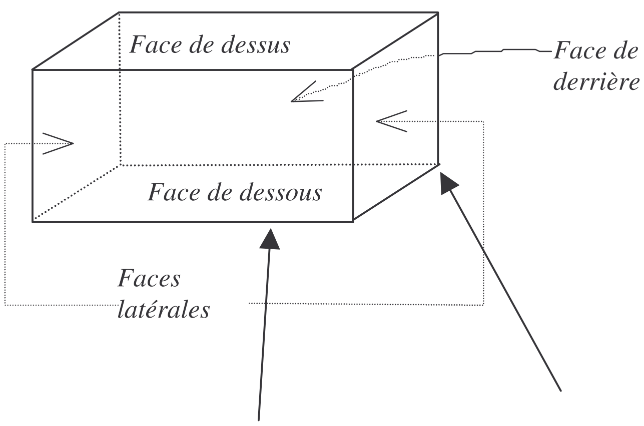
1. *Un pavé est délimité par des **faces** qui sont des ………………. superposables deux à deux. On compte ……… faces.*
2. *Les faces se coupent en des segment appelés …………………..*

*Un pavé a …….**arêtes,** qui sont les intersections des faces deux à deux.*

3. *Les arêtes se coupent en des points appelés ………………*

*On compte ……**sommets**, qui sont les intersections des arêtes deux à deux.*

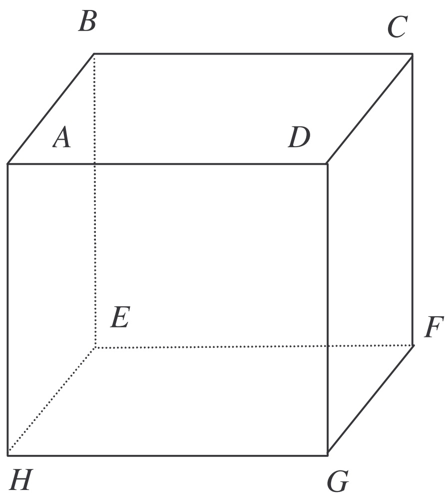
Selon la manière dont il est présenté, le même pavé peut avoir des allures différentes. C'est pourquoi, il est toujours gênant de parler de base, de longueur, largeur ou hauteur, tout dépendra de sa représentation.
Par exemple, dans la présentation ci-dessous, on adopte un vocabulaire qui rend compte de ce que l'on voit.



Les trois dimensions d'un pavé s'appelle la longueur, la largeur et la hauteur.

Exercice 1

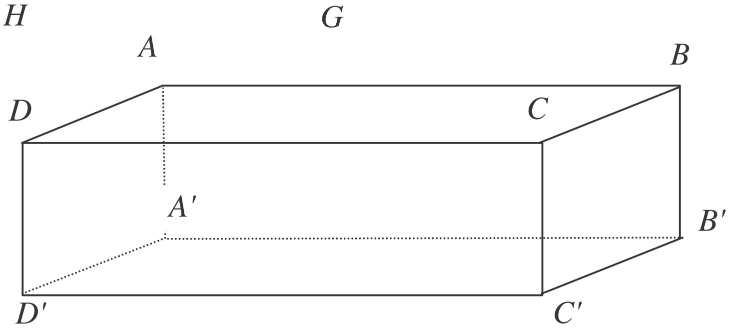
Faire la liste des faces, des arêtes et des sommets des deux pavés suivants :



faces :

arêtes :

sommets :

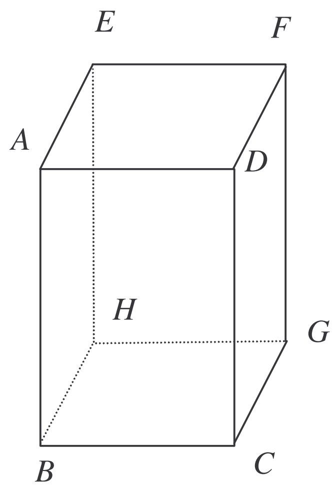


faces :

arêtes :

sommets :

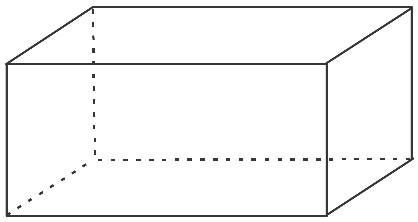
Exercice 2



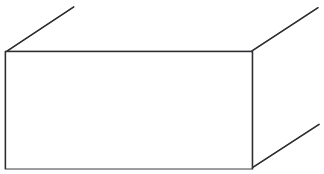
La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle.

1. *Nommer deux faces contenant l'arête [AB].*
2. *Nommer trois arêtes contenant le sommet C.*
3. *Nommer deux arêtes parallèles.*
4. *Nommer quatre arêtes de même longueur.*

2. REPRESENTATION EN PERSPECTIVE CAVALIERE

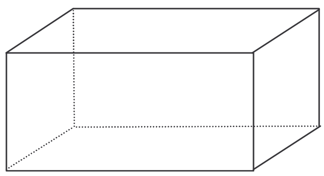


*Si l'on veut représenter un solide, un certain nombre de **conventions** sont à respecter pour que le dessin soit compris par tous.*



1. *La face avant est représentée en premier par un rectangle à une certaine échelle.*
2. *Parmi les arêtes des autres faces, trois semblent fuir vers l'arrière, en oblique. On les dessine en deuxième, parallèles et de même longueur. Mais pour garder la notion de distance due à l'éloignement, on va réduire un peu ces longueurs (d'un tiers par exemple).*

3. *Les deux arêtes visibles de la face arrière sont dessinées en traits pleins ensuite.*



4. *Enfin **les arêtes cachées sont dessinées en traits pointillés.** La face arrière apparaît alors comme un rectangle superposable à la face de devant.*

*Ce type de dessin porte le nom de **perspective cavalière**.*

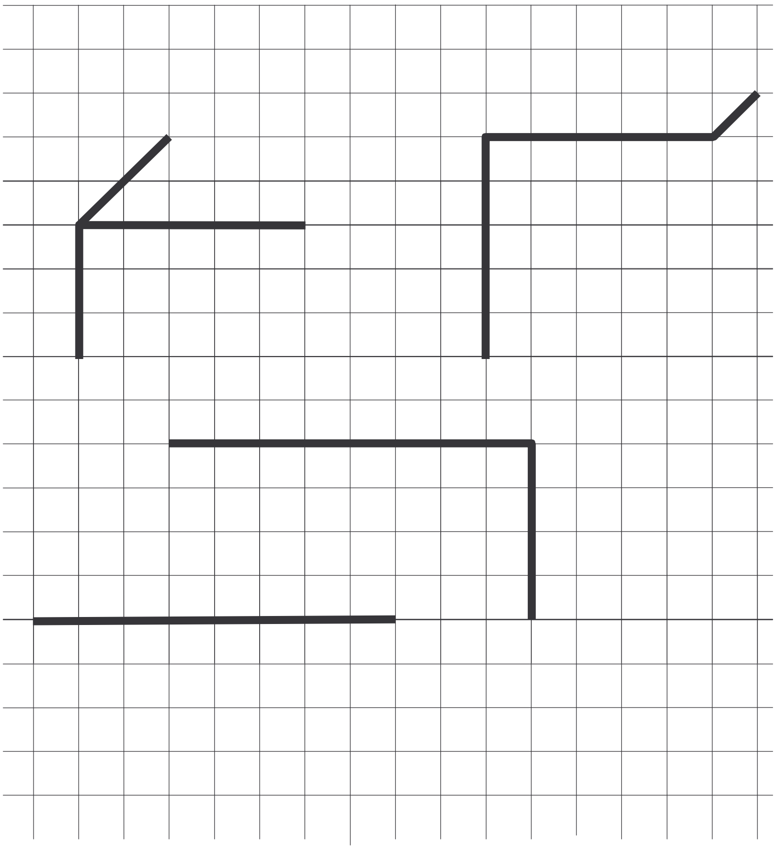
Remarques :

- ***Les segments parallèles et de même longueur dans la réalité restent parallèles et de même longueur sur un dessin en perspective.***
- ***Les angles ne sont pas toujours respectés dans un dessin en perspective (ils le sont seulement sur les faces avant et arrière).***

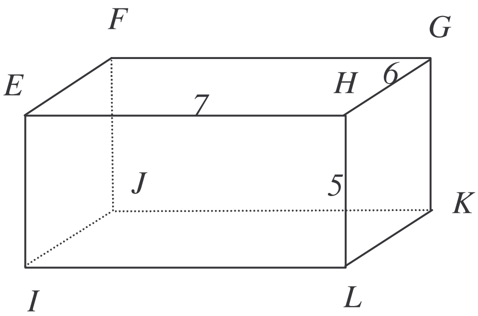
- *Ces conventions sont différentes de ce que l'on peut voir sur une photographie. En effet sur une photo, les droites parallèles fuyant vers le "fond" de la photo (par exemple les rails parallèles d'une ligne de chemin de fer) semblent se rapprocher l'une de l'autre.*

Exercice 1

*Terminer les **trois** dessins en perspective des trois pavés suivants :*



Exercice 2



Voici la représentation en perspective cavalière d'un pavé EFGHIJKL. Vous allez le représenter à gauche de 3 nouvelles manières, en respectant les longueurs données : HL = 5 EH = 7 HG = 6

1. *Représenter ce même pavé en choisissant EFGH comme face avant et FJKG comme face du dessus.*
2. *Représenter ce même pavé en choisissant HGKL comme face avant et GKFJ comme face de côté.*
3. *Représenter ce même pavé en choisissant EFGH comme face avant et EFJI comme face du dessus.*

3. Patron du pave droit

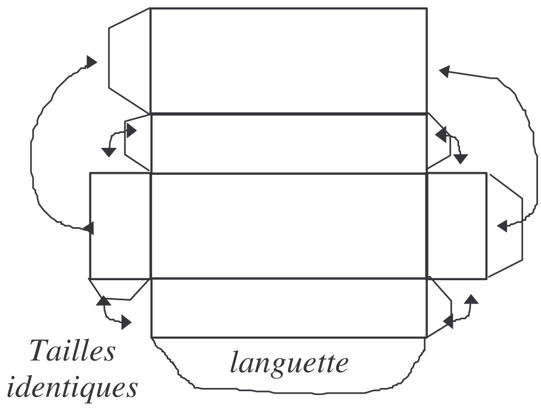
Quand on ouvre certaines boîtes en forme de pavé, on s'aperçoit qu'il y a des languettes pour tenir la boîte fermée et permettre un collage facile. Ces languettes ne sont pas des faces du pavé ! Si on découpe ces languettes, on peut ouvrir complètement la boîte et on obtient ce que l'on appelle le patron du pavé.

Définition : *Le* ***patron*** *d'un solide, est la surface construite sur papier qui permet, après pliage et collage, de construire ce solide.*

Remarques : *1) Les languettes de collage ne font pas partie du patron !*

2) Le point essentiel dans la confection (fabrication) d'un patron est la disposition correcte des différentes faces afin qu'elles se recollent parfaitement après pliage.

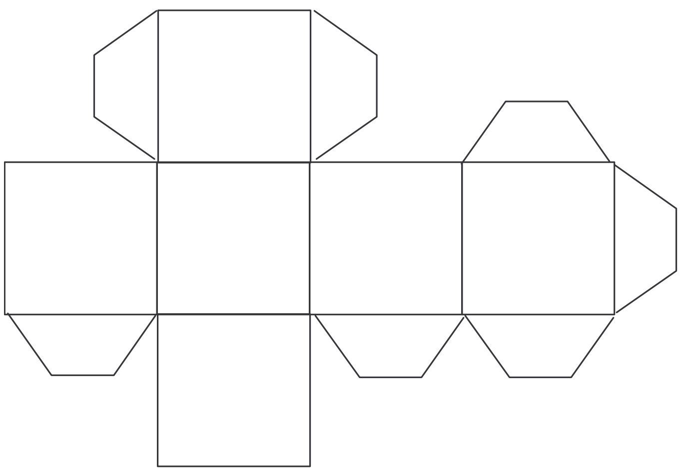
3) Dans le patron d'un pavé droit, les faces vont toujours ***par paires.***



utilité :
Le patron permet :

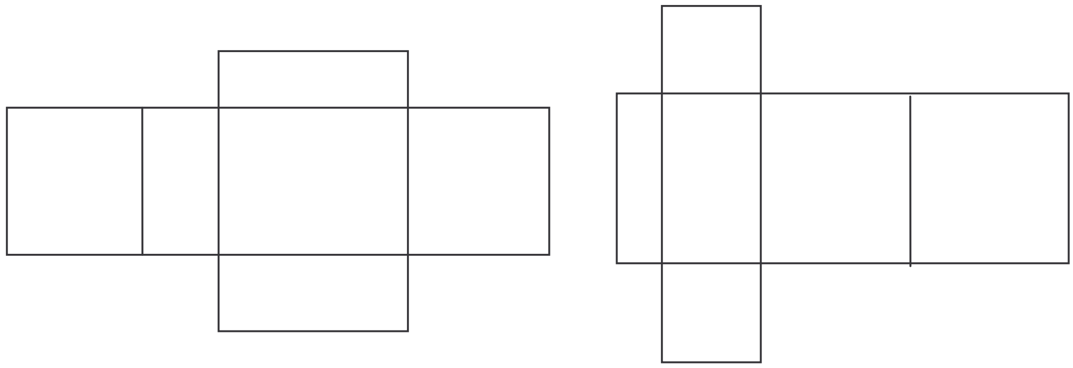
- *d'étudier les six faces du pavé et de comprendre lorsque l'on réalise la construction du solide que les faces sont deux à deux superposables.*
- *de comprendre comment sont placées les arêtes de même longueur.(ce qui est signalé par les doubles flèches sur le dessin).*

Pour un cube, le problème est plus simple, car les six faces sont six carrés identiques. Voici un exemple de patron du cube (avec les languettes de collage):



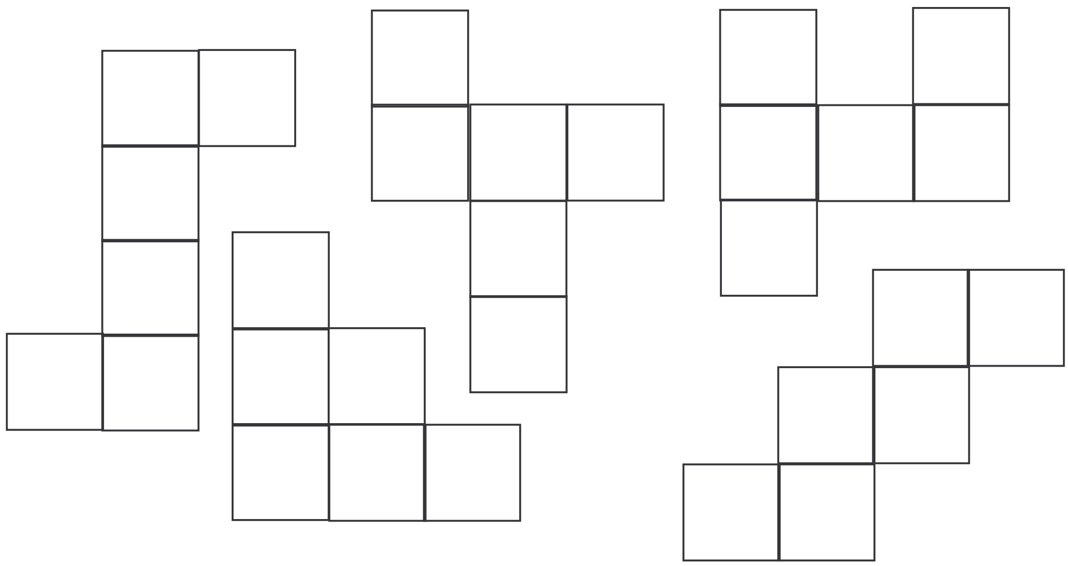
Exercice 1

Ces deux patrons permettent-ils ou non de réaliser la construction de pavés ? Pourquoi ?



Exercice 2

Parmi les figures suivantes, lesquelles sont les patrons d'un cube ?



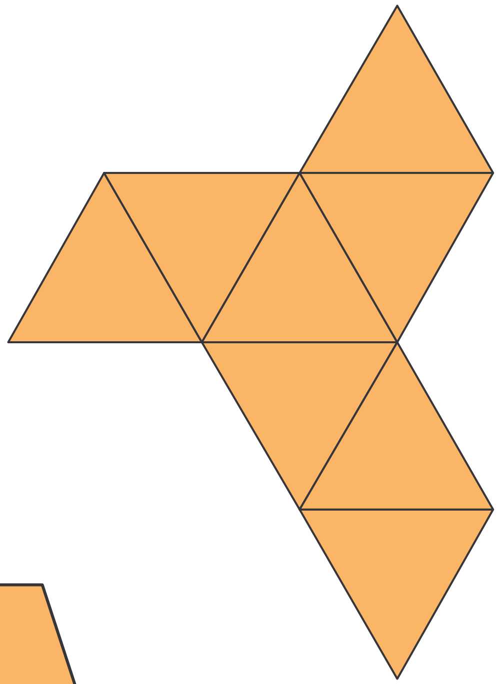
*Remarque : il y a en fait **11** patrons pour le cube.*

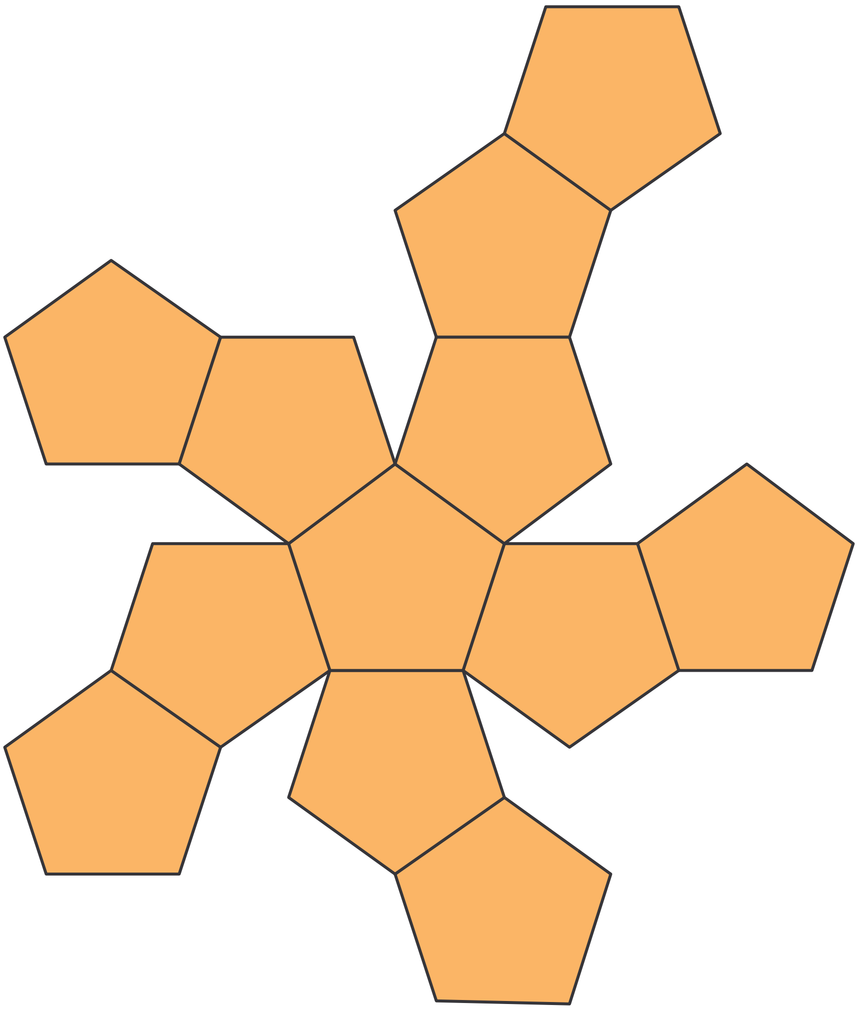
Exercice 3 (en face).

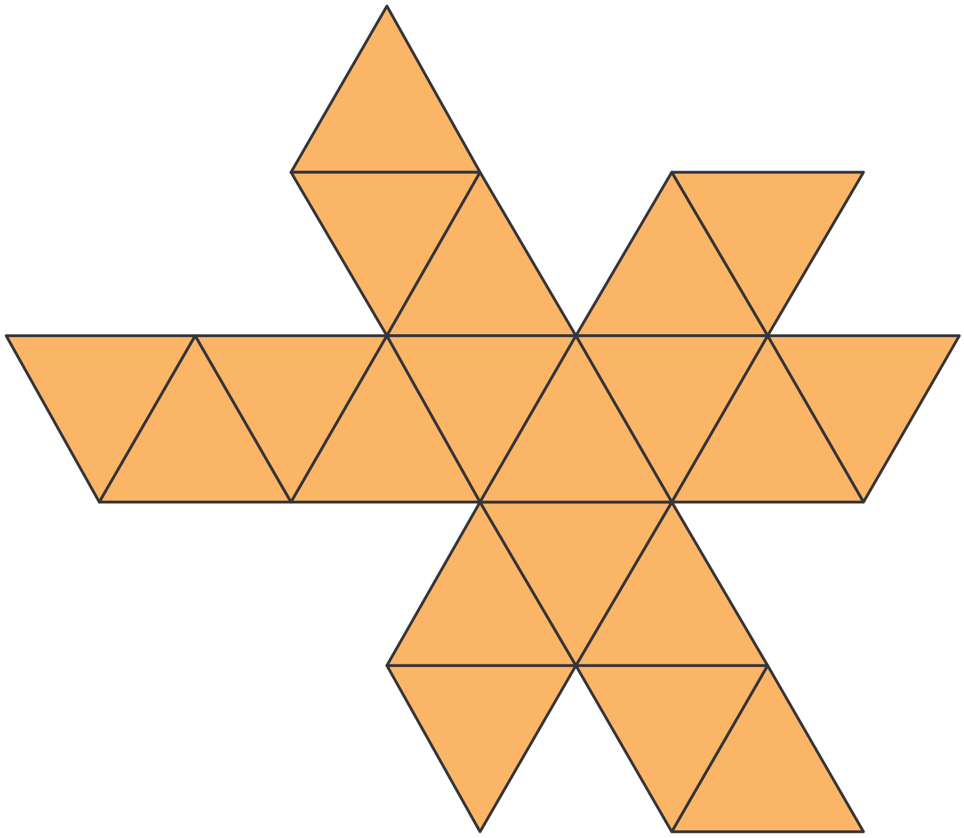
- *Réaliser à gauche le patron d'un pavé dont les dimensions sont 5 cm, 6 cm et 8 cm.*
- *Réaliser le patron d'un cube de 5 cm d'arête.*

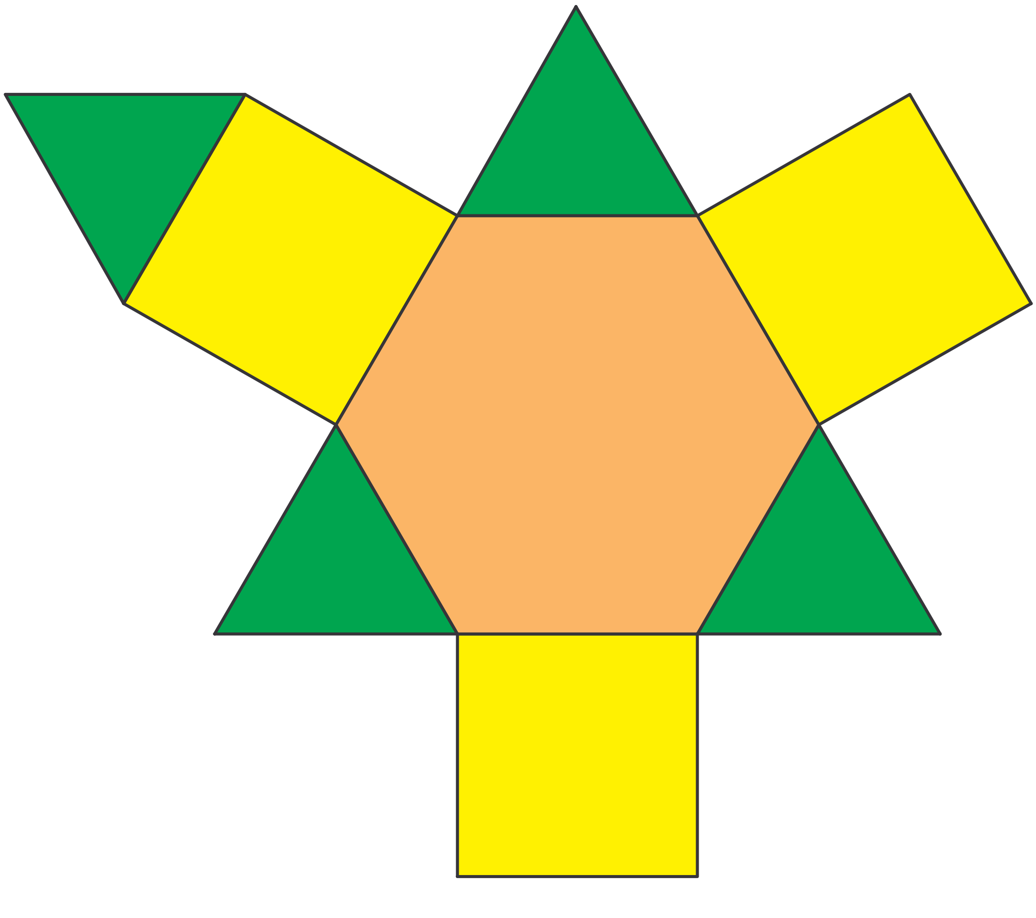
D'autres patrons de solides

Découper ou reproduire ces patrons pour fabriquer d'autres solides moins évidents que le cube ou le pavé.
Penser à placer les languettes qui serviront au collage des faces









4. Aire d'un solide

Un pavé (un cube), comme nous l'avons vu, est constitué de 6 faces planes qui sont des rectangles (des carrés).

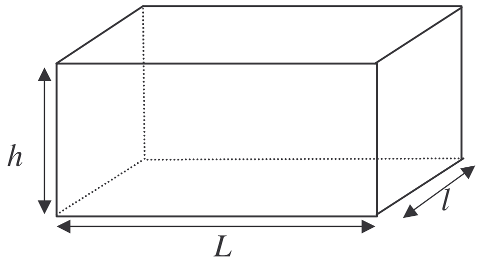
1. *Définition :*

On appelle aire du pavé, l'aire totale des six faces du pavé.

Remarque : plus généralement, ***l'aire d'un solide est l'aire du patron de ce solide.***

2. *Formule de l'aire d'un pavé :*

On appelle L, l et h les trois dimensions du pavé.
Puisque le pavé est constitué de 6 faces rectangulaires, on peut faire la somme des aires des 6 rectangles.



- *Il y a deux rectangles (faces avant et arrière) dont les dimensions sont L et h. Chacun de ces 2 rectangles a pour aire : ………*
- *Il y a deux rectangles (faces du dessous et du dessus) dont les dimensions sont L et l. Chacun de ces 2 rectangles a pour aire : ………*
- *Il y a deux rectangles (faces sur les côtés) dont les dimensions sont h et l. Chacun de ces 2 rectangles a pour aire : ………*

Finalement, en faisant la somme de toutes ces aires, on obtient la formule :

$$A(\text{pavé}) = 2 \ldots\ldots\ldots + 2 \ldots\ldots\ldots + 2 \ldots\ldots = 2(\ldots. + \ldots.. + \ldots.)$$

3. *Formule de l'aire d'un cube :*

Puisque les six faces d'un cube sont toutes des carrés de longueur de côté a (comme arête), on obtient la formule :

$$A(\text{cube}) = \ldots\ldots \times A(\text{face carrée})$$

Exercice 1

Les arêtes d'un pavé ont pour longueur 12 cm ; 2,5 cm et 7 cm.

- *Calculer la longueur totale des arêtes.*
- *Calculer l'aire totale des faces.*

Exercice 2

Les arêtes d'un cube ont pour longueur 8 cm.
Calculer la longueur totale des arêtes et l'aire totale des faces.

Exercice 3

La longueur totale des arêtes d'un cube est de 60 cm.
Quelle est la longueur d'une arête ? Quelle est l'aire d'une face ?

Exercice 4

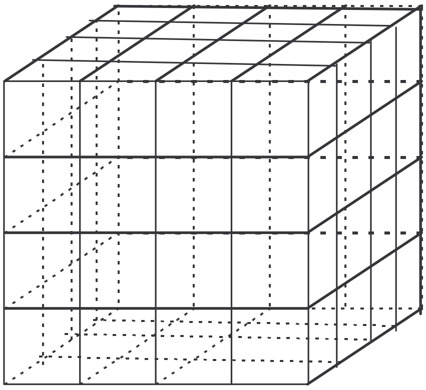
Une salle de séjour a la forme d'un pavé. Ses dimensions sont 9,5 m de longueur et 6 m de largeur. La hauteur des murs est 2,40 m.
On veut peindre les quatre murs. Quelle est l'aire de la surface à peindre ?
Un litre de peinture couvre 16 m². Combien faut-il prévoir de pots de 3 litres pour être sûr de pouvoir peindre les quatre murs ?

5. UNITES DE VOLUME

1. *Définitions :*

- *L'unité de volume (volume unité) choisie par le système international des mesures est le* ***m^3*** *(lire « mètre cube »).*
- *Le m^3 correspond au volume d'un cube dont les 3 dimensions sont égales à 1 m.*

2. *Multiples et sous multiples du m^3 , conversions :*



Ce cube est formé de cubes plus petits .
Il est composé de quatre couches de cubes superposées qui sont formées chacune de 4×4 c-à-d 16 cubes. Il y a donc 64 (= $4 \times 4 \times 4$ qu'on écrit aussi 4^3) petits cubes dans le grand.
On peut donc dire que lorsque l'on multiplie les dimensions d'un petit cube par 4, le volume devient 64 (c-à-d 4^3) fois plus grand.

De la même manière, si on multiplie les dimensions d'un cube par 10, le volume sera 1 000 (c-à-d 10^3) fois plus grand. On peut donc dresser le tableau de conversion suivant :

hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
centaine	dizaine	unité	centaine	dizaine	unité	centaine	dizaine	unité	centaine	dizaine	unité	centaine	dizaine	unité	centaine	dizaine	unité

Exemple : Pour passer des dm^3 au m^3, il faudra diviser par 1000.
Pour convertir des dam^3 au cm^3, il faudra multiplier par $1000 \times 1000 \times 1000$, ce qui correspond au schéma de conversion $dam^3 \rightarrow m^3 \rightarrow dm^3 \rightarrow cm^3$ (3 flèches donc 3 multiplications par mille).

3. *Autre unité de mesure des volumes :*

Il existe un autre système d'unités qui est utilisé couramment pour les liquides contenus dans des solides. On les appelle les unités de capacité. La principale est le litre.

Définition : Un litre est la contenance d'un solide de volume 1 dm^3. Donc 1 l = 1 dm^3

Multiples et sous multiples du litre : hl, dal, dl, ml. Ces unités sont chacune ***dix fois*** *plus grande que celle qui lui est juste inférieure. D'où le nouveau tableau de conversion complet cette fois ci !*

hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
								kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			

Exercice 1

Exprimer en dm^3 les mesures suivantes :

3,75 hl =

540 dal =

3570 dl =

480000 ml =

Exercice 2

convertir en litres les mesures suivantes :

430 cm^3 = *36 dm^3 =* *52 000 mm^3 =*

Exercice 3

Ranger les volumes suivants par ordre décroissant après les avoir convertis dans une même unité :

3 l *400 cm^3* *350 ml* *4,5 dl*

Exercice 4

Effectuer :

25 dm^3 + 420 cm^3 + 0,072 m^3 =

568 dm^3 - 7 500 cm^3 =

Exercice 5

On a rassemblé 3 pavés droits de volumes : 13,24 m^3, 175,6 m^3, 3 200 cm^3.
Quel est le volume du solide obtenu ?

Exercice 6

Dans un cube de 153,1 dm^3 , on creuse un trou de 5260 cm^3.
Quel est le volume du solide restant ?

Exercice 7

Une citerne est un cube de 1,2 m d'arête. Cette citerne est remplie aux trois quarts après une pluie. Combien d'arrosoirs de 15 litres le jardinier peut il remplir avec l'eau de la citerne ?

Exercice 8

Combien faudrait - il de seaux de 12 litres pour vider un bassin parallélépipédique rempli aux trois quarts et dont les dimensions sont 1,2 m ; 80 cm et 60 cm ?

6. VOLUMES DU CUBE ET DU PAVE

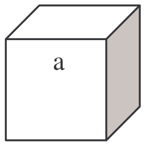
1. *Définition :*

Mesurer le volume d'un solide, c'est déterminer le nombre de volumes unité que l'on peut placer dans ce solide.

2. *Volume du cube :*

Le volume d'un cube s'obtient en calculant le produit $a \times a \times a$ (où a est la longueur commune des arêtes du cube). On a une écriture plus simple sous forme de puissance :
$a \times a \times a$ s'écrit plus simplement a^3 (lire « a au cube ou cube de a »).

$$\boxed{V(cube) = a^3 = a \times a \times a.}$$

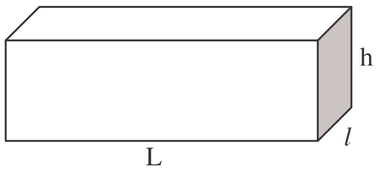


3. *Volume du pavé :*

Imaginons que l'on place trois cubes côte à côte, on obtient une bande de trois cubes.
Puis on accole quatre bandes identiques, on obtient une épaisseur de 12 cubes.
Puis on entasse 5 épaisseurs identiques, on obtient un gros cube de 60 petits cubes.
Ainsi, en prenant le cube de départ pour unité, le volume du gros pavé formé vaut
$3 \times 4 \times 5 = 60$ unités.

*Le **volume d'un pavé** s'obtient en calculant le produit $\boldsymbol{L \times l \times h}$ où L, l et h sont les trois dimensions du pavé.*

$$\boxed{V(pavé) = L \times l \times h}$$



Exercice 1

Quel est le volume d'un cube dont l'arête a pour longueur 7 cm ?

Exercice 2

Quel est le volume d'un pavé dont les dimensions sont 8 cm , 7 cm , 9 cm ?

Exercice 3

Il est tombé 70 cm de neige dans une cour rectangulaire de 15 m sur 30 m.
Calculer le volume de neige recouvrant la cour ?

Exercice 4

On a répandu une couche de cailloux de 8 cm d'épaisseur sur une route droite de 150 m de longueur et 4 m de largeur. Combien de m^3 de cailloux a t - il fallu pour effectuer ce travail ?

Exercice 5

Une citerne est un cube de 1,25 m d'arête. Après une pluie cette citerne est remplie aux quatre cinquièmes. Combien de litres d'eau contient - elle ?

Exercice 6

Un robinet débite 26 litres d'eau par minute. Combien de temps lui faut - il pour remplir un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont : 1,2 m ; 1,4 m ; 0,75 m.

Exercice 7

Pour aérer une pièce, longue de 10,45 m, large de 6,7 m et haute de 3,1 m, on utilise un ventilateur brassant 35 litres d'air par seconde.
Quel est le volume de la pièce ?
Quel temps faudra t-il pour renouveler complètement l'air contenu dans cette pièce ?

Exercice 8

On veut empierrer une route de 15 m de long et de 9 m de large sur une épaisseur de 20 cm. La livraison est effectuée par des bennes de 4 m^3.
Combien de voyages sont nécessaires ?

Exercice 9

Un pavé droit a pour volume 39,78 m^3. Les dimensions de sa base sont 1,5 m et 3,4 m.
Quelle est sa hauteur ?