CORRIGE LES TRIANGLES.

« Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique. » Galilée[1], XVII s.

[1] Galilée est l'un des plus grands savants de l'Humanité, le père de la physique moderne et un grand astronome. Il fut révoqué par l'Eglise en 1632 pour avoir montré que la Terre tourne autour du Soleil et non l'inverse. Il ne fut réhabilité qu'en 1757.

Pour ce cours, vous devez amener votre matériel de géométrie et votre rapporteur en particulier.

I. RAPPELS DE 6EME :

Triangle isocèle : définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est isocèle.
Triangle équilatéral : définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est équilatéral.
Triangle rectangle : définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est rectangle.
Médiatrice d'un segment, **axe de symétrie**.
Bissectrice d'un angle : définition, propriété.

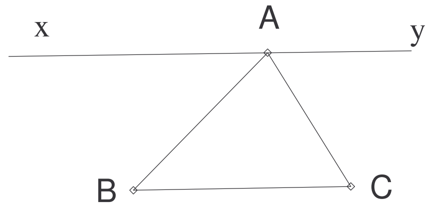
Voir p. 129-130 Ou mon cours de 6ème sur les triangles (espace 6ème contrat 2)

II. ANGLES ET TRIANGLES.

A. Somme des angles dans un triangle :

Règle : Dans n'importe quel triangle, la somme des mesures des 3 angles est égale à ………°

Preuve : Activité I 1] p.167
Recopie et complète le raisonnement du I 1] b) p.167.



Utilité : Lorsqu'on connaît les mesures de 2 angles dans un triangle, on peut en déduire la mesure du troisième.

Exemple et modèle de rédaction : soient $\widehat{A} = 38$ et $\widehat{B} = 42°$, calculer $\widehat{C}$.

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

donc $\widehat{C} = 180° - 38° - 42°$

$\widehat{C} = 100°$

A vous maintenant ! Dans chaque cas, calculer la mesure du troisième angle $\widehat{C}$:

① le triangle ABC est rectangle en A et $\widehat{B} = 45°$. Que remarquez vous pour ABC ?

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

donc $\widehat{C} = 180° - 45° - 45°$

$\widehat{C} = 90°$

On avait déjà $\widehat{A} = \widehat{B}$ *donc ABC isocèle en C. De plus* $\widehat{C} = 90°$ *donc ABC isocèle et rectangle en C.*

② $\widehat{A} = 35°$ et $\widehat{B} = 2\,\widehat{A}$.

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Donc $\widehat{A} + 2\,\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$

D'où $3\,\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$

C-à-d $\widehat{C} = 180° - 3\,\widehat{A}$

$\widehat{C} = 180° - 3 \times 35°$

$\widehat{C} = 180° - 105°$

$\widehat{C} = 75°$

③ Le triangle ABC est isocèle en C et $\widehat{A} = 30°$.

Puisque ABC est isocèle en C, alors $\widehat{A} = \widehat{B}$

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Donc $\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{C} = 180°$

D'où $2\,\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$

Donc $\widehat{C} = 180° - 2\,\widehat{A}$

$\widehat{C} = 180° - 2 \times 30°$

$\widehat{C} = 120°$

B. Angles et triangles particuliers.

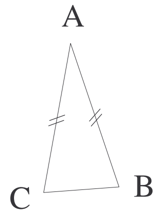
1. Angles et Triangle isocèle :

Puisqu'un triangle isocèle possède un axe de symétrie passant par le milieu de la base et le sommet principal, alors les deux angles à la base sont *de même mesure.*

Règle : **utiliser l'égalité de 2 angles à la base dans un triangle isocèle :**

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle isocèle en A	alors	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

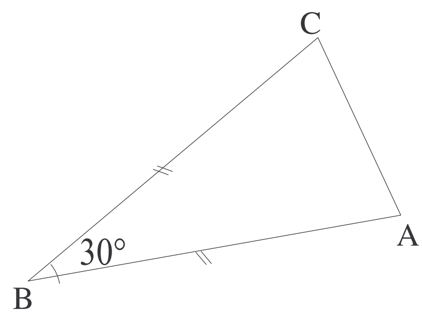
croquis



Autrement dit : Dans un triangle isocèle, les 2 angles à la base sont de même mesure.

Utilité : Cette propriété sert à écrire une égalité d' *angles.*

Exercice ① : Dans la figure ci contre, calculer la mesure de $\widehat{C}$.



D'après le codage, ABC est isocèle en B. Donc $\widehat{C} = \widehat{A}$

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Donc $\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

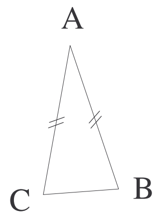
Donc $2\,\widehat{C} + \widehat{B} = 180°$

D'où $\widehat{C} = \dfrac{180° - \widehat{B}}{2} = \dfrac{180° - 30°}{2} = \dfrac{150°}{2} = 75° = \widehat{A}$

<u>Réciproque</u> : **prouver qu'un triangle est isocèle en un point :**

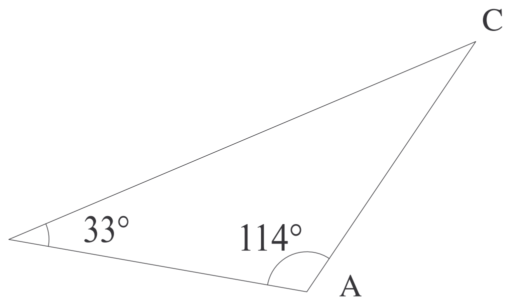
	(2 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	① ABC est un triangle ② $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$	alors	ABC est *isocèle en A*

croquis



Autrement dit : Un triangle ayant 2 angles de même mesure est un triangle isocèle.
<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à prouver qu'un triangle est *isocèle* en un point.

<u>Exercice ②</u> : Le triangle suivant est-il isocèle ?



Calculons $\widehat{C}$

Dans le triangle ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Donc $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B}$

$\widehat{C} = 180° - 114° - 33°$

$\widehat{C} = 33°$

Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{ABC est un triangle}\\ \widehat{C} = \widehat{B}\end{array}\right\}$ *alors ABC isocèle en A.*

2. Angles et Triangle équilatéral :

Tracer un triangle équilatéral OUF de 3 cm de côté ainsi que les axes de symétrie de ce triangle.
Puisque le triangle équilatéral possède *3 axes de symétrie*, les mesures des 3 angles sont *égales.*
Calculer cette mesure commune aux 3 angles du triangle équilatéral.

<u>calcul</u>

- *Dans le triangle ABC,* $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
- *Puisque ABC est équilatéral, alors* $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$

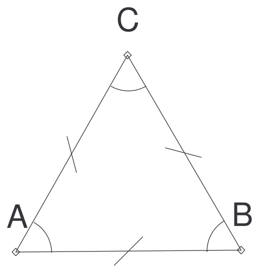
Donc l'égalité $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ *devient :* $\widehat{A} + \widehat{A} + \widehat{A} = 180°$

c-à-d $3 \times \widehat{A} = 180°$

donc $\widehat{A} = \dfrac{180°}{3}$

- *finalement* $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$

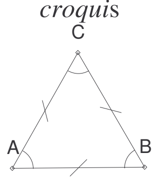
<u>figure</u>



<u>Propriété</u> : **utiliser l'égalité des 3 angles dans un triangle équilatéral :**

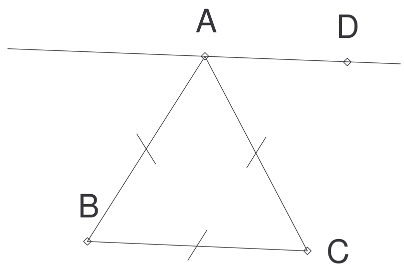
	(1 condition ou hypothèse)		(3 résultats ou conclusions)
Quand	ABC est un triangle équilatéral	alors	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{CAB} = 60°$

croquis



Autrement dit : Dans un triangle équilatéral, les 3 angles ont même mesure.
<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à écrire des *égalités d' angles.*

Exercice : sur la figure ci contre, (AD) // (BC). Calculer l'angle $\widehat{CAD}$.

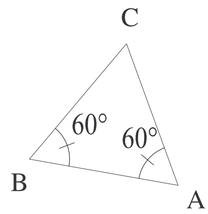


Puisque ABC équilatéral, alors $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$

Puisque $\left\{\begin{array}{c} (AD) \,//\, (BC) \\ \widehat{BCA} \text{ et } \widehat{CAD} \text{ alternes internes} \end{array}\right\}$ *alors* $\widehat{BCA} = \widehat{CAD} = 60°$.

Réciproque : **prouver qu'un triangle est équilatéral :**

croquis

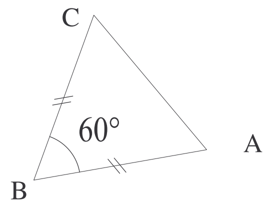


	(2 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	①ABC est un triangle ② $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60°$	alors	ABC est *équilatéral*

Autrement dit : Un triangle ayant 2 angles égaux à 60°. est un triangle équilatéral.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un triangle est *équilatéral.*

Exercice : prouver que le triangle ABC est équilatéral.



D'après le codage, ABC isocèle en B donc $\widehat{C} = \widehat{A}$

Dans ABC, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A} = 180°$$

$$\widehat{A} = \frac{180° - \widehat{B}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Puisque $\left\{\begin{array}{c} \text{ABC triangle} \\ \widehat{CBA} = \widehat{CAB} = 60° \end{array}\right\}$ *alors ABC est équilatéral.*

Avant de continuer, il est fortement conseillé de faire tous les exercices sur le site de François Loric : Maths au collège / exercices / angles.

III. CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES.

A. A partir de la longueur des 3 côtés :

Pour tracer un triangle quelconque au compas et à la règle graduée, il faut connaître ses trois longueurs, (*2 voire 1 longueur seulement si le triangle est spécial).*

Méthode générale pour tracer une figure à partir d'un énoncé :

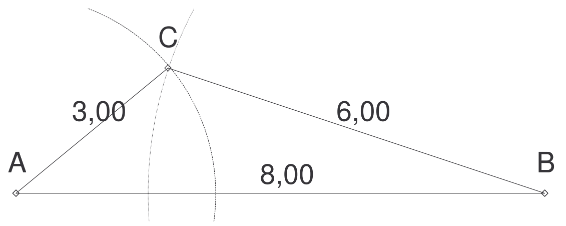
① On fait d'abord un petit **croquis à main levée** de la figure pour avoir une idée de la forme et **on reporte** sur ce petit croquis **les informations** données par l'énoncé (longueurs, angles, codages etc)

② Puis, on suit le plan de construction, **étape par étape**, à la règle et au compas, pour construire proprement la figure.

Attention aux notations !

Tracez le triangle ABC sachant que AB = 8 cm, AC = 3 cm, BC = 6 cm.

figure



Plan de construction

① tracer le segment (le plus grand en général) [AB] de longueur *8*cm.

② construire au compas le point C tel que :

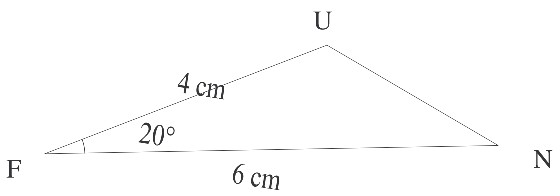
AC = 3 cm et BC = 6 cm

B. A partir d'un angle et des deux longueurs adjacentes :

On utilise en plus de la règle graduée et du compas, le rapporteur.
Et on fait un petit croquis avec les mesures pour se faire une idée.

Tracez le triangle UFN sachant que $\widehat{UFN}$= 20°, UF = 4 cm et FN = 6 cm.

figure



Plan de construction

① tracer le segment (le plus grand en général) *[FN]* de longueur *6* cm.

② construire au rapporteur l'angle $\widehat{UFN}$ tel que : $\widehat{UFN} = 20°$

③ placer le *troisième point U* tel que :

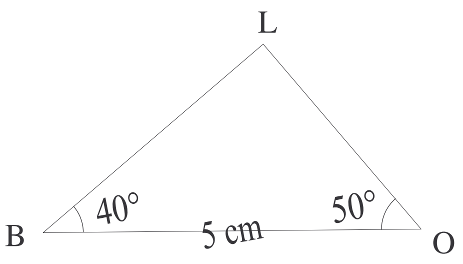
UF = 4 cm

C. A partir de la longueur d'un côté et des 2 angles adjacents à ce côté :

On utilise en plus de la règle graduée et du compas, *le rapporteur.*
Et on fait un petit croquis avec les mesures pour se faire une idée.

Tracez le triangle BOL sachant que BO = 5cm, $\widehat{OBL}$ = 40° et $\widehat{BOL}$ = 50°.

figure



Plan de construction

① tracer le segment *[BO]* de longueur *5 cm.*

② construire au rapporteur l'angle $\widehat{OBL}$ tel que : $\widehat{OBL} = 40°$.

③ construire au rapporteur l'angle $\widehat{BOL}$ tel que : $\widehat{BOL} = 50°$.

④ placer le troisième point *L*

D. 2 Remarques sur les constructions :

- Pour pouvoir construire un triangle, combien faut il toujours au minimum d'informations ? *3.*

Exemples : triangle dont on connaît 2 angles et 1 longueur ⟶ *3* informations.

triangle rectangle isocèle et 1 longueur ⟶ *3* informations.

- Dans la construction A] , une question complètement existentielle se pose :

Peut on toujours, à partir de 3 longueurs quelconques données, construire un triangle ?

Exemple : sur un vieux lambeau de parchemin datant de l'an 1748, on pouvait lire :

« Barbe rose, notre vieux chef pirate ordonna d'enterrer le coffre contenant tous les apéricubes à 3 coudées du parasol sur la plage et à 5 coudées du palmier sur la colline.

Et malin comme je suis, je n'ai point oublié de mesurer la distance entre le parasol et le palmier : 9 coudées.

A moi le trésor, à moi les apéricubes ! ». signé Paul Ichinel.

Faire un schéma géométrique pour situer le coffre *si possible*. Mr Paul est il si malin que cela ?

D'après les données, le coffre se trouve à 3 du parasol donc il est situé sur le cercle de centre le parasol et de rayon 3. De même, le coffre se trouve à 5 du palmier donc il est situé sur le cercle de centre le palmier et de rayon 5. Au final, le coffre devrait se trouver à l'intersection des 2 cercles.
Sur le schéma ci dessous, on voit qu'il est impossible de situer ce coffre car les cercles ne se coupent pas !
Mr Paul est un imbécile et aurait dû mieux écouter en cours d géométrie !

Ce petit problème nous amène au à écrire une condition d'existence sur les longueurs pour les triangles.

IV. INEGALITE TRIANGULAIRE.

A. Propriété :

Propriété de l'inégalité triangulaire :

	(1 condition ou hypothèse)		(3 résultats ou conclusions)
Quand	ABC est un triangle	alors	AB < AC + CB AC < AB + BC BC < BA + AC

Autrement dit : Dans un triangle, la longueur de chaque côté doit être *strictement inférieure* à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Vocabulaire : Chacune des 3 inégalités s'appelle une **inégalité triangulaire**.

Utilité : Cette propriété sert à écrire des inégalités de longueurs dans un triangle.

En fait, cette propriété n'est pas utilisée en tant que telle mais plutôt sa **conséquence très importante** :

Conséquence pratique très importante :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	$AB \geq AC + CB$ **ou** $AC \geq AB + BC$ **ou** $BC \geq BA + AC$	alors	Le triangle ABC *n'existe pas*.

Autrement dit : Il suffit de vérifier qu'une longueur soit plus grande ou égale que la somme des 2 autres, pour qu'on ne puisse pas tracer le triangle.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'on ne peut pas *construire* un triangle.

Exemple :

Peut on construire un triangle ABC de longueurs AB = 75 cm ; AC = 43 cm et BC = 31 cm ?

modèle de rédaction :

On va comparer la plus ***grande longueur*** *avec la somme des 2 autres.*

- D'une part AB = 75 cm.
  D'autre part AC + BC = 43 + 31 = 74 cm
- Puisque AB > AC + BC alors le triangle ABC ne peut être construit.

Exercices :

① Peut on construire un triangle de longueurs AB = 187cm ; AC = 21cm ; BC = 209cm ?

- *D'une part BC = 209 cm*
  D'autre part AB + AC = 187 + 21 = 208 cm
- *Puisque BC > AB + AC alors le triangle ABC ne peut être construit.*

② Donner 3 longueurs toutes plus grandes que 50 qui ne peuvent pas être les trois longueurs d'un triangle.

I l suffit de prendre une longueur plus grande que 50 et plus grande que la somme des deux autres.

Par exemple : 200 100 et 50. On a 200 > 100 + 50 donc le triangle n'existe pas.

③ Voici 2 longueurs d'un triangle : $\frac{1}{7}$ et $\frac{5}{21}$. Quelle doit être au minimum strictement la 3ème longueur du triangle ?

Pour que le triangle existe, il faut que la 3ème longueur cherchée soit plus grande strictement que $\frac{1}{7} + \frac{2}{21}$.

$$\frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{8}{21}$$

La 3ème longueur doit strictement supérieure à $\frac{8}{21}$

Que se passe-t-il maintenant quand les trois inégalités triangulaires sont vérifiées ? C'est l'objet de la réciproque de la propriété de l'inégalité triangulaire.

<u>Réciproque de l'inégalité triangulaire</u> :

	(3 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	AB < AC + CB **et** AC < AB + BC **et** BC < BA + AC	alors	ABC est un triangle.

<u>Remarque</u> : **Pour que le triangle existe, il suffit en fait de vérifier que la plus grande des longueurs soit plus *petite strictement* que la somme des 2 autres.**

<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à prouver qu'on peut tracer un triangle.

<u>Exercices</u> : ③ Peut on construire un triangle dont les longueurs seraient : $\frac{2}{5}$ cm ; $\frac{7}{10}$ cm ; $\frac{9}{20}$ cm ?

On met tout au même dénominateur (sur 20) pour savoir quelle est la plus grande des longueurs.

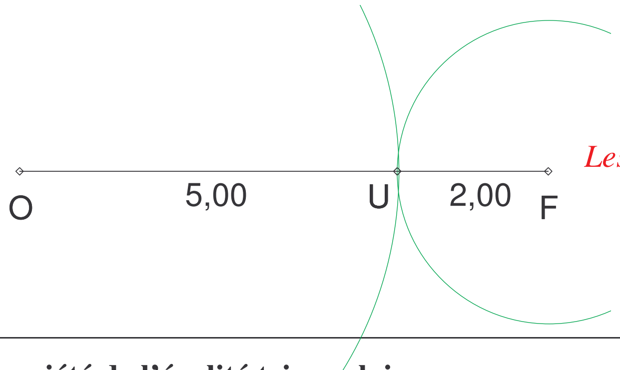
- $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ $\quad$ $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$ $\quad$ $\frac{9}{20}$
- *D'une part, on a* $\frac{14}{20}$

  D'autre part $\frac{9}{20} + \frac{8}{20} = \frac{17}{20}$
- *Puisque* $\frac{7}{10} < \frac{2}{5} + \frac{9}{20}$ *alors le triangle peut être construit.*

B. <u>Cas de l'égalité :</u>

Que se passe-t-il maintenant quand il y a égalité des 3 longueurs ? Essayez de placer 3 points O, U, et F tels que : OF = 7 cm, OU = 5 cm, UF = 2 cm. Comment semblent être les points O,U, et F ?

Le point U doit se trouver à l'intersection du cercle $\mathcal{C}_{(O\ ;\ 5\ cm)}$ et du cercle $\mathcal{C}_{(F\ ;\ 2\ cm)}$



Les points O, U et F sont alignés dans cet ordre : U ∈ [OF]

<u>Propriété de l'égalité triangulaire</u> :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	AC = AB + BC	alors	B ∈ [AC]

Autrement dit : Quand une longueur est égale à la somme des 2 autres, les points sont alignés[2].

<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à prouver qu'un point est sur un *segment.*

<u>Figure</u> : AC = AB + BC

Remarque : la réciproque de cette propriété est aussi vraie : Quand $C \in [AB]$, alors $AB = AC + CB$

Exercice : voici trois longueurs : $MI = \frac{5}{7}$ $MO = \frac{2}{7}$ et $OI = 1$ Les trois points sont ils alignés ?

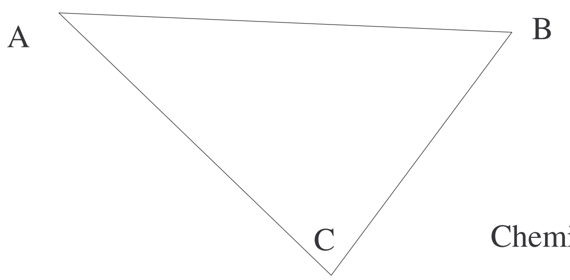
On met tout au même dénominateur (sur 7) pour savoir quelle est la plus grande des longeurs.

- *D'une part* $OI = 1 = \frac{7}{7}$
- *D'autre part* $MI + MO = \frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} = 1$!
- *Puisque* $OI = MI + MO$ *alors les points O, M et I sont alignés ds cet ordre :* $M \in [OI]$

C. Signification de l'inégalité triangulaire :

- N'importe laquelle des 3 inégalités triangulaires peut se traduire de la façon suivante :

Sur une surface plane, le **plus court chemin entre 2 points est le segment reliant ces 2 points !**



$$AB < \underbrace{AC + CB}$$

Chemin en ligne droite. Autre chemin passant par un point C hors de [AB].

- Cette inégalité triangulaire dit aussi qu'il faut **faire très attention avec les longueurs et l'addition** :

En général, $AB < AC + CB$ (cas du triangle).

Il n'y a égalité $AB = AC + CB$ que dans le cas où les points A, C et B sont alignés dans cet ordre ($C \in [AB]$).

Autrement dit **« la longueur de la somme est très rarement égale à la somme des longueurs »** !

En troisième, vous verrez un outil appelé vecteur tel qu'on aura toujours $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Mais bon, c'est encore loin !

D. Exercices récapitulatifs :

① $AB = \frac{8}{3}$ $AC = \frac{5}{6}$ $BC = \frac{29}{12}$ Comment sont les points A, B et C ?

On met tout au même dénominateur (sur 12) pour savoir quelle est la plus grande des longeurs.

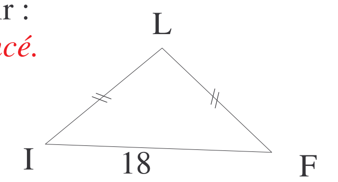
$AB = \frac{8}{3} = \frac{32}{12}$ $AC = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ $BC = \frac{29}{12}$ *AB est la plus grande longueur.*

- *D'une part* $AB = \frac{32}{12}$

  D'autre part $AC + BC = \frac{10}{12} + \frac{29}{12} = \frac{31}{12}$
- *Puisque* $AB > AC + BC$ *alors le triangle ABC n'existe pas. Il est impossible d'avoir des points A, B et C comme donnés dans l'énoncé.*

② Soit FIL un triangle isocèle en L tel que la base mesure 18 cm. Peut on avoir :

On fait d'abord un croquis en reportant les informations données dans l'énoncé.



LI = 9,1 cm ?

- *D'une part FI = 18*
  D'autre part LI + LF = 2 × 9,1
  = 18,2
- *Puisque FI < LI + LF*
  Alors le triangle FIL existe

LI = 9 cm ?

- *D'une part FI = 18*
  D'autre part LI + LF = 2 × 9
  = 18
- *Puisque FI = LI + LF*
  Alors les points F, I et L sont aligné dans cet ordre : I ∈ [FL].

FL = 8,9 cm ?

- *D'une part FI = 18*
  D'autre part LI + LF = 2 × 8,9
  = 17,8
- *Puisque FI > LI + LF*
  Alors le triangle FIL n' existe pas.

V. CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE.

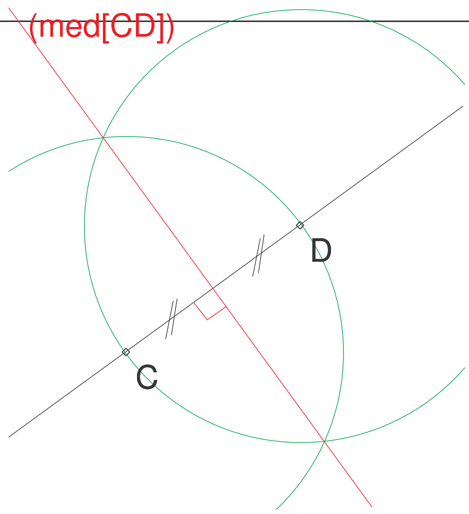
A. Rappel médiatrice :

Définition : La **médiatrice** d'un segment est *LA* droite :

❶ passant par l*e milieu* de ce segment,

❷ *perpendiculaire* à ce segment.

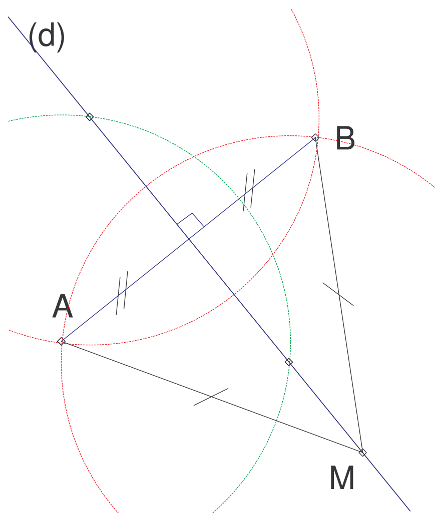
Notation : La médiatrice d'un segment [AB] est notée : **med[AB]**



Exercice 1:
Comment note-t-on la médiatrice de [CD] ? *med [CD]*
Tracer en rouge à la règle et au compas
la médiatrice de [CD].

① On trace les 2 cercles $\mathcal{C}_{(C\,;\,CD)}$ et $\mathcal{C}_{(D\,;\,CD)}$
Ils se coupent en deux points équidistants de C et D.
② On trace la droite passant par ces deux points :
c'est la médiatrice de [CD].

N'oubliez pas de coder la figure !



Exercice 2 : placer en vert B de telle sorte que la droite d soit la médiatrice de [AB].
① On trace un cercle (en vert sur la figure) qui coupe d en 2 points.
② A partir de chacun de ces 2 points, on trace un cercle (en rouge sur la figure) de même rayon que le cercle vert.
Ces deux cercles se coupent en A et en un autre point qui est B !
③ On place le codage qui dit que d est la med[AB].

Comment sont A et B ? symétriques par rapport à d.
A et B sont symétriques par rapport à d.

Placer un point M sur med [AB].
Comment semble être le triangle AMB ?

AMB semble isocèle en M.

Codage !

Propriété métrique de la médiatrice :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	M est sur la médiatrice d'un segment [AB]	alors	MA = MB

Autrement dit : Lorsque un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est situé égale distance des deux extrémités de ce segment.

Utilité : cette propriété sert à prouver une égalité de *longueur.*

Inversement :

Réciproque de la propriété métrique de la médiatrice :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	*MA = MB*	alors	M est sur la médiatrice du segment [AB]

*Autrement dit : Lorsque. un point est **équidistant**[3] des extrémités d'un segment, alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.*

Utilité : cette propriété sert à prouver qu'un point est sur une *droite.*

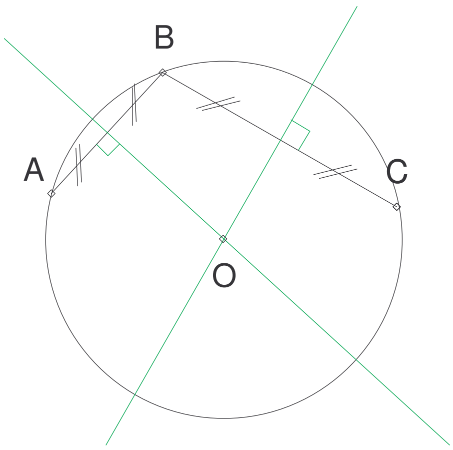
Commentaire :

Quand **une propriété et sa réciproque sont vraies** en même temps, on dit que cette **propriété** est **caractéristique** : ici, seul l'objet médiatrice et lui seul a tous ses points équidistants de 2 points fixes.

Application directe : ***Construction à la règle et au compas du centre d'un cercle.***

Placer trois points distincts sur ce cercle.

Puis construire grâce aux médiatrices le centre de ce cercle.



① On place 3 points A, B et C sur le cercle.

② Il suffit de tracer 2 des 3 médiatrices du triangle ABC.

Puisque A, B et C ne sont pas alignés alors ces deux médiatrices ne peuvent pas être parallèles.

Donc elles vont se couper en un point O équidistant de A, B et C : c'est forcément le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exercice classique :

Construire en rouge C, le symétrique de A par rapport à B.

On trace C de tel sorte que B soit le milieu de [AC].

Tracer Δ la perpendiculaire (AC) passant par B.

Placer un point M sur Δ.

1) Quelle est la médiatrice de [AC], justifiez.

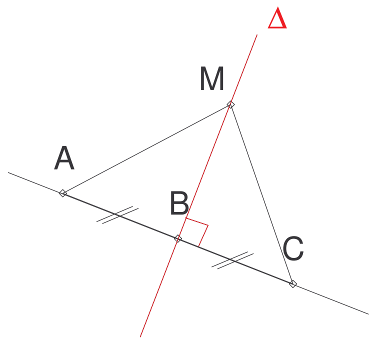
➢ *Puisque C est l'image de A par la symétrie de centre B, alors B est le milieu de [AC].*

➢ *Puisque* $\left\{\begin{array}{c}\Delta \text{ passe par B le milieu de [AC]} \\ \Delta \perp (AC)\end{array}\right\}$ *alors Δ est la med [AC]*

2) Quelle est la nature de ACM ?

Puisque M sur la med [AC] alors MA = MC.

Donc le triangle AMC est isocèle en M.



B. Cercle circonscrit à un triangle.

1. Théorème :

Théorème :

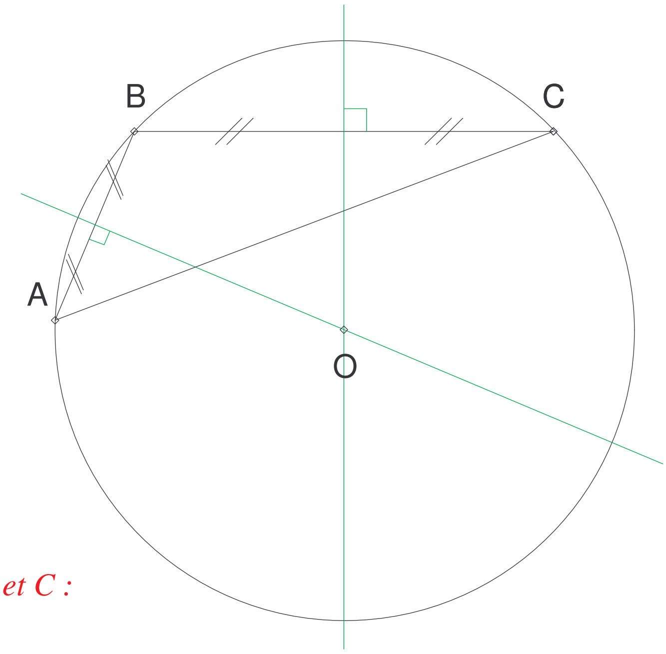
- Les 3 médiatrices des cotés d'un triangle *se coupent* en un point.

On dit qu'elles sont *concourantes* en ce point.

- Ce point de concours des 3 médiatrices est *équidistant* des trois sommets du triangle :

C'est le *centre du cercle circonscrit* au triangle

Figure :
Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.
Pour tracer le cercle circonscrit à un triangle,



Il suffit de tracer 2 des 3 médiatrices du triangle ABC.
Puisque A, B et C ne sont pas alignés alors ces deux médiatrices ne peuvent pas être parallèles.
Donc elles vont se couper en un point O équidistant de A, B et C : c'est forcément le centre du cercle circonscrit à ABC.

Preuve du théorème :

① Mise en place :

Puisque ABC est un triangle, les 2 médiatrices des côtés [AB] et [BC] ne peuvent pas être parallèles, donc elles se coupent en un point qu'on va appeler O.

② Montrons que O est aussi équidistant de A et C :

Puisque O ∈ med[AB] alors *OA = OB*

Puisque O ∈ *med[BC]* alors OC = *OB*

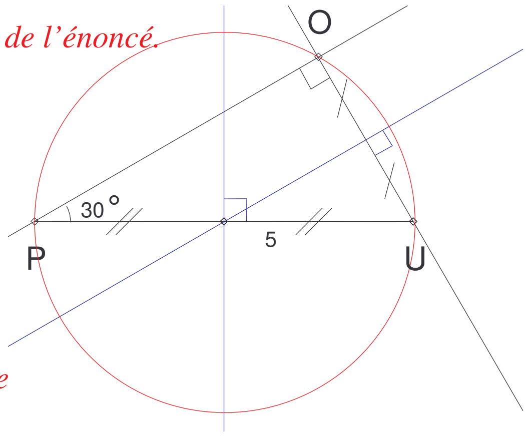
Donc *OA = OB = OC* *

③ Concluons :

- Puisque *OA = AC* alors O ∈ med[AC]. Donc O est bien sur la troisième médiatrice.
- D'après l'égalité *, O est équidistant de A, B et C, donc O est le centre d'un *cercle* passant par A, B et C. Ce cercle s'appelle le *cercle circonscrit* au triangle ABC. CQFD

2. Exercices :

① Tracer le triangle POU rectangle en O tel que PU = 5 cm et $\widehat{PUO} = 30°$.
Construire en couleur le cercle circonscrit au triangle POU.
Où semble se trouver le centre de ce cercle ? …………………………



➢ *Construction du triangle POU :*

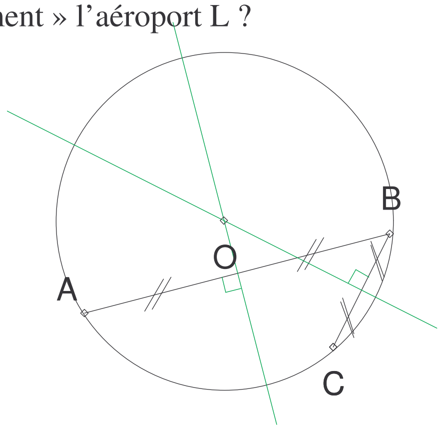
Il était nécessaire ici de d'abord faire un croquis avec les données de l'énoncé.
① On trace [PU] tel que PU = 5 cm.
② On trace l'angle $\widehat{PUO}$ tel que $\widehat{PUO} = 30°$.
③ On trace la droite (PO), passant par P

et perpendiculaire au côté (UO) de l'angle $\widehat{PUO}$.

➢ *Construction du cercle circonscrit à POU :*

Il suffit de tracer 2 médiatrices.
Il semble que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle soit le milieu du plus grand côté (l' hypoténuse).
C'est effectivement le cas et ce résultat remarquable sera vu en 4ème.

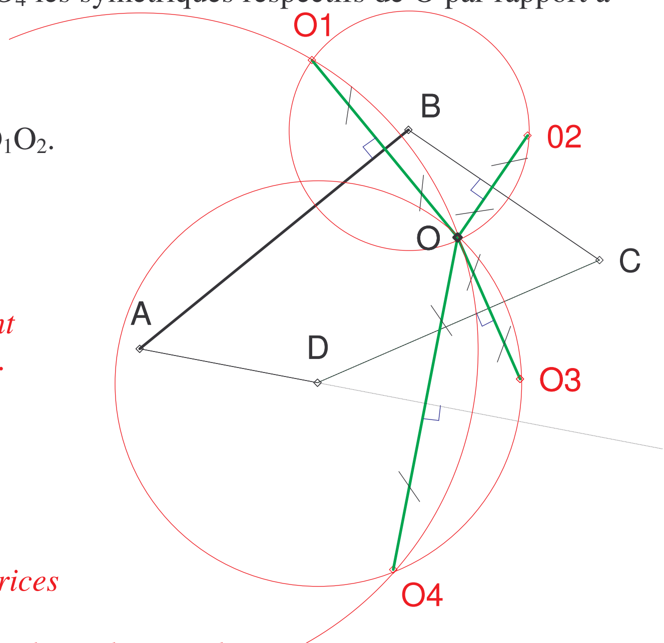
② Voici 3 villes assimilées aux points A, B et C. Où placer « équitablement » l'aéroport L ?



Equitablement signifie que l'aéroport doit être équidistant des 3 villes.
Cet aéroport est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

③ Sur la figure ci contre, on a commencé à tracer O_1, O_2 et O_4 les symétriques respectifs de O par rapport à (AB), (BC) et (AD).

1) Placer proprement les codage manquants.
2) Tracer O_3 le symétrique de O par rapport à (DC).
3) Prouver que B est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_2.
4) Quel est le centre du cercle circonscrit à OO_3O_4 ?
5) Quel est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_4 ?
6) Tracer ces 3 cercles.



1) On a affaire à 3 symétries axiales donc ces 3 axes sont des médiatrices. D'où le codage en bleu et noir sur la figure.

2) O_3 symétrique de O par rapport à (DC) équivaut à (DC) médiatrice de $[OO_3]$.

3) Pour résoudre cette question, il faut trouver 2 médiatrices du triangle OO_1O_2.
Puisque O_2 symétrique de O par rapport à (BC) alors (BC) est la médiatrice de $[OO_2]$.
Puisque O_1 symétrique de O par rapport à (AB) alors (AB) est la médiatrice de $[OO_1]$.
(BC) et (AB) sont donc 2 médiatrices de OO_1O_2 et elles se coupent en B !
Donc B est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_2.

4) Pour résoudre cette question, il faut trouver 2 médiatrices du triangle OO_3O_4.

Puisque O_3 symétrique de O par rapport à (DC) alors (DC) est la médiatrice de $[OO_3]$.

Puisque O_4 symétrique de O par rapport à (AD) alors (AD) est la médiatrice de $[OO_4]$.

(DC) et (AD) sont donc 2 médiatrices de OO_3O_4 et elles se coupent en D !

Donc D est le centre du cercle circonscrit à OO_3O_4.

5) Pour résoudre cette question, il faut trouver 2 médiatrices du triangle OO_1O_4.

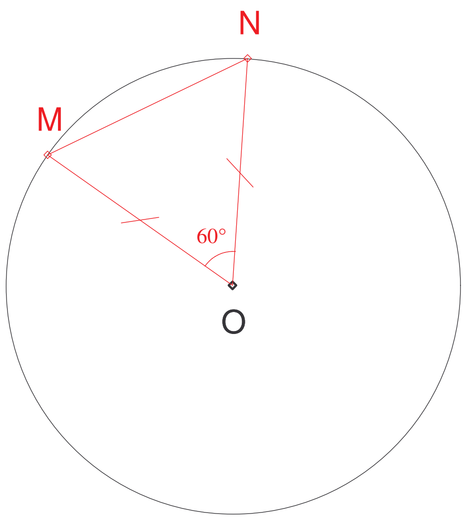
Puisque O_1 symétrique de O par rapport à (AB) alors (AB) est la médiatrice de $[OO_1]$.

Puisque O_4 symétrique de O par rapport à (AD) alors (AD) est la médiatrice de $[OO_4]$.

(AB) et (AD) sont donc 2 médiatrices de OO_1O_4 et elles se coupent en A !

Donc A est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_4.

④ Placer sur le cercle les points M et N non diamétralement opposés tels que $\widehat{MON} = 60°$.
Quelle est la nature de MON ? Justifier évidemment !



- *Puisque M et N sont sur le cercle alors MO = MN*

Donc le triangle MON est isocèle en O.

- *Puisque* $\left\{\begin{array}{c}\text{MON isocèle en O} \\ \widehat{MON} = 60°\end{array}\right\}$ *alors MON équilatéral.*