LES EQUATIONS DU 1ER DEGRE A 1 INCONNUE.

« Ne lise pas mes principes qui n'est pas **mathématicien.** » **Léonard de Vinci[1].**

Non mi legga chi non è matematico, nelli mia principi.

[1]Léonard de Vinci (1452-1519) : l'auteur de la célèbre Joconde impressionna plus ses contemporains par ses qualités scientifiques qu'artistiques. L'analyse scientifique du réel, la réflexion avant l'expérimentation sont les principes de base de la démarche de Vinci, qu'il manifesta aussi bien dans les arts que dans les sciences.
En physique et en astronomie, il traça les voies sur lesquelles s'engageront Copernic, Kepler, et Galilée pour l'étude de la gravitation, du scintillement des étoiles, et du mouvement. Il pressentit les lois de la mécanique des fluides ainsi que, en chimie, celles de la combustion et de la respiration. Au total, un grand nombre des découvertes de la science moderne sont anticipées dans les notes de Léonard, sous une forme balbutiante.
Quant aux Mathématiques, cette discipline revêtait un caractère particulier chez Léonard puisqu'elle était le ferment de toutes les autres. Le recours insistant aux procédés mathématiques était une garantie de rationalité et l'unique moyen de s'assurer des principes stables dans les deux domaines de prédilection où Léonard entendit se « réaliser » : la peinture et la mécanique.
En mécanique, précisément, Léonard s'illustra en inventant un certain nombre de machines dont le principe est toujours en usage (notamment dans l'industrie textile).

Introduction :

Dans la vie courante ou dans les différents secteurs de l'activité humaine (sciences, économie, travail…), on est souvent amené à rechercher une ou plusieurs quantités inconnues (prix maximal, vitesse optimale, etc) que l'on déterminera grâce à des relations ou des conditions qui se traduiront par une ou plusieurs égalités.
Exemple : j'ai acheté 3 pomelos avec 1 billet de 10€, on m'a rendu 3,7€. Comment trouver le prix d'un pomelos ? (la résolution de ce genre de problèmes ne sera plus un problème à la fin du cours !)

I. GENERALITES SUR LES EQUATIONS :

A. Définitions, vocabulaire :

1. 1ère rafale :

① Une **variable** est une quantité (représentée commodément par une lettre), dont la valeur n'est pas fixée a priori (cf cours sur le calcul littéral p.2).

② Une **équation** est une « **égalité » particulière** qui comporte une ou plusieurs variables **inconnues**.

Le **membre de gauche** (resp. de droite) d'une équation est le côté gauche (resp. droit) de l'égalité.

➢ 2 exemples :

• $3x^2 + 2y - \frac{85}{3} + 22z = 58(x^2 + yz^2)$ Cette « égalité » est une équation dite du 2d degré[2], à *3* variables inconnues : x, y et z. Rassurez vous, on ne résoudra pas de telles équations avant l'Université !

• Par contre l'exemple qui suit est au programme de 5ème :

$3 + x = 3x - 5$ Cette « égalité » est une équation dite du 1er degré à *1* inconnue : x.

➢ Ne pas confondre égalité et équation :

- Une **égalité** est une **affirmation** mathématique toujours vraie :

Par exemple, quand j'écris $2x + 3x = 5x$ j'affirme en fait que $2x + 3x$ est toujours égal grâce au calcul littéral, à $5x$, et ce quelque soit la valeur de x. C'est une vérité indépendante de la valeur de x !

- Une **équation** est en fait une **question** et non une affirmation !

Par exemple l'équation $-3 = 3x - 5$ **ne dit pas** que -3 est toujours égal à $3x - 5$ **mais pose la question** suivante : « Pour quelle(s) valeur(s) de x le membre de droite $3x - 5$ est il égal au membre de gauche -3 ? »
En fait, pour distinguer égalité et équation, il faudrait mettre un ? au dessus du signe = de l'équation.

➢ Exercice :

Les expressions suivantes sont elles des équations ou des égalités ? Si ce sont des équations, préciser leur degré et la ou les inconnues.

	Equation ou égalité ?	Degré ?	Noms des inconnues ?
Ex : $5 = 2t + 3$	équation	1er	t
$2\pi + 3\pi = 5\pi$			
$3f - 5 = 13m$			
$2cm = 9cm - 7cm$			
$0 = x^2 + 2x + 1$			

[2] Le degré d'une équation correspond à la plus grande puissance d'une variable inconnue rencontrée dans l'égalité. Ici c'est 2 car il y a des x² (et des z²) dans l'égalité.

2. $2^{ème}$ rafale :

> ➢ **Résoudre une équation**, c'est essayer de trouver la ou les valeurs des inconnues qui rendent l'égalité **vraie.**
> ➢ Ces valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie sont appelées les **solutions** de l'équation.

2 exemples :

- 1 est solution de l'équation $5 = 2t + 3$. En effet, en remplaçant t par 1 dans le membre de droite de l'équation, on obtient $2\times1 + 3 = 2 + 3 =$ .... Il y a égalité des 2 membres.
- 2 n'est pas une solution de l'équation $3x + 4 = 7$. En effet, en remplaçant x par 2 dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $3 \times 2 + 4 =$ .... $\neq 7$! Il n'y a pas .... des 2 membres.

B. Comment vérifier que des valeurs sont bien solutions d'une équation.

> Méthode : ❶ On calcule chaque membre de l'équation ***séparément*** (formulation : *d'une part …, d'autre part*) en remplaçant la ou les inconnues par les valeurs proposées.
> ❷ On compare les 2 résultats des 2 calculs :
> Quand il y a **égalité** des 2 membres, alors la ou les valeurs proposées sont solutions de l'équation de départ.

Méthode : vérifions par exemple si $x = 1$ est solution de l'équation $6x = 3x + 2$

1. D'une part $6x = 6 \times 1 = 6$
   D'autre part $3x + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$
2. Puisque $5 \neq 6$, alors $x = 1$ n'est pas solution de l'équation $6x = 3x + 2$.

Exercice : Vérifier si les valeurs proposées sont solutions ou non des équations ci dessous.

➢ $u = 8$ pour $8u + 5 - 5u = 8u - 35$

$t = 2$ pour $\frac{2}{t} - 3 = -4$

D'une part

D'autre part

Puisque

➢ $y = 6$ pour $9 = \frac{3}{2}y$

$x = 1$ et $w = -2$ pour $-x - 1 = -w$

D'une part

D'autre part

Puisque

➢ $x = 2$ et $y = 1$ pour $2x - y = 3y$

$t = 2$ et $p = -1$ pour $-t - p = -3 + t + p$

II. RESOLUTION DES EQUATIONS DU 1ER DEGRE :

➢ Pour résoudre une équation (3x − 25 = -14 − 3x par exemple), on pourrait « essayer » des valeurs au hasard pour x et vérifier si elles sont solutions.

Cette méthode est mauvaise ! Il faudrait essayer un nombre infini de valeurs !

De plus, quand on a trouvé une valeur qui marche, qui nous dit que c'est l'unique solution ?

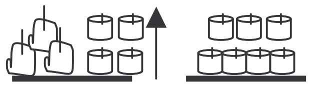
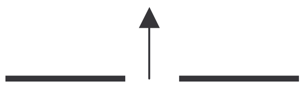
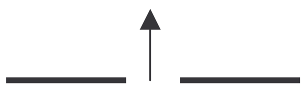
➢ **On a donc besoin d'une vraie méthode !**

A. Deux règles fondamentales de transformation des égalités.

Ex : On veut résoudre 3x + 4 = 7. Intuitivement, la seule solution de cette équation est x = ...

On va retrouver ce résultat simple par des transformations sur les égalités en nous aidant du modèle de la balance à 2 plateaux (le but étant surtout de bien comprendre comment fonctionnent ces 2 transformations).

Illustrer l'équation sur le modèle de la balance en prenant pour x une pomme  et des poids  de 100g.

Egalités.	Explications mathématiques.	Illustration sur le modèle de la balance.	Explications pour le modèle de la balance.
3x + 4 = 7	Equation de départ		Balance au départ
❶ 3x + 4 − *4* = 7 − *4*	On soustrait *4* aux deux membres pour se débarrasser du +4 qui est à gauche.	ne rien écriree	On retire 400g à chaque plateau.
3x = 3	On a isolé 3x à gauche.		On a isolé 3 pommes sur le plateau de gauche
❷ $\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$	On divise chaque membre par *3* pour se débarrasser de la multiplication par 3.	ne rien écrire	On divise par 3 chaque plateau de la balance.
x = 1	On a isoler l'inconnue x : l'unique solution de l'équation de départ est 1		La balance indique le poids de la pomme : 1 poids de 100g

Cet exemple très simple de résolution permet, grâce aux lignes ❶ et ❷ du tableau précédent, d'énoncer les **2 règles fondamentales** de transformation des égalités permettant petit à petit **d'isoler l'inconnue** :

Règle ① : **On a le droit d'ajouter ou de soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité.**

Comment utilise-t-on cette règle ?

- **Dans un membre, pour se débarrasser d'une addition par un nombre, inversement, on soustrait aux 2 membres de l'équation le même nombre :**

Méthode : $x + 3 = -2$ pour isoler l'inconnue x, il faut se débarrasser de l'addition + 3 à gauche.

$x + 3 - 3 = -2 - 3$ pour cela, on soustrait *3* aux 2 membres de l'équation.

$x = -5$ on a réussi à isoler x : l'unique solution de l'équation de départ est –5.

- **Dans un membre, pour se débarrasser d'une soustraction par un nombre, inversement, on additionne aux 2 membres de l'équation le même nombre :**

Méthode : $-2 = y - 3$ pour isoler l'inconnue y, il faut se débarrasser de la soustraction – 3 à droite.

$-2 + 3 = y - 3 + 3$ pour cela, on additionne *3* aux 2 membres de l'équation.

$1 = y$ on a réussi à isoler y : l'unique solution de l'équation de départ est 1.

Exercices : résoudre en colonnes :

$x + 5 = -3$ $6 + t = -6$ $-1 = 9 + p$

$y - 8 = -2$ $-9 = u - 5$ $p - \pi = 3$

Règle ② : **On a le droit de multiplier ou diviser par un même nombre ≠ 0, les 2 membres d'une égalité**.

Comment utilise-t-on cette règle ?

- **Dans un membre, pour se débarrasser d'une multiplication par un nombre non nul, inversement, on divise les 2 membres de l'équation par le même nombre :**

Méthode : $18 = 3x$ pour isoler x, il faut se débarrasser de la multiplication par 3 à droite.

$\frac{18}{3} = \frac{3x}{3}$ pour cela, on divise par *3* les 2 membres de l'équation.

$6 = x$ on simplifie quand on peut : l'unique solution de l'équation de départ est 6.

- **Dans un membre, pour se débarrasser d'une division par un nombre non nul, inversement, on multiplie les 2 membres de l'équation par le même nombre :**

Méthode : $\frac{y}{3} = 18$ pour isoler l'inconnue y, il faut se débarrasser de la division par 3 à gauche.

$\frac{y}{3} \times 3 = 18 \times 3$ pour cela, on multiplie par *3* les 2 membres de l'équation.

$y = 54$ on a réussi à isoler y : l'unique solution de l'équation de départ est 54.

<u>Exercices</u> : résoudre en colonnes :

$5j = 55$	$63 = p \times 7$	$7y = 2$	$\pi = k \times 9$
$\frac{h}{8} = 6$	$r \div 3 = 3$	$3 = \frac{x}{0{,}1}$	$\pi = \frac{d}{8}$

<u>Remarque importante</u> : vous devrez, quand vous serez à l'aise avec les transformations d'équation, « *passer* » une opération *directement* dans l'autre membre en respectant bien les 4 règles :

Une addition se transforme en ……….…………….   Une soustraction se transforme en …………..….

Une multiplication se transforme en ………………….   Une division se transforme en …………………..

Ex :

$x + 5 = -3$	$-9 = u - 5$	$7x = 21$	$\frac{x}{6} = 5$
$x = -3 \mathit{-5}$	$-9 \mathit{+5} = u$	$x = \frac{21}{\mathit{7}}$	$x = 5 \mathit{\times 6}$
$x = -8$	$-4 = u$	$x = 3$	$x = 30$

$\boxed{\textbf{Dorénavant, on utilisera toujours cette méthode simplifiée.}}$

B. <u>Tableau récapitulatif des solutions des équations de base :</u>

Grâce à ces 2 règles fondamentales de transformation des égalités, on peut donner les solutions des **4 équations de base et des 2 équations annexes** (x est l'inconnue, a et b sont 2 nombres fixés).

Les 6 équations de base	Solutions
$\mathbf{x + a = b}$	$\mathbf{x = b - a}$
$\mathbf{a - x = b}$ **équivaut à** $\mathbf{a = b}$ …………	
$\mathbf{x - a = b}$	
$\mathbf{a\,x = b}$	
$\mathbf{\frac{x}{a} = b}$	
$\mathbf{\frac{a}{x} = b}$ **équivaut en inversant à** $\mathbf{\frac{x}{a} = \frac{...}{...}}$	

Exercices : résoudre en colonnes.

$6 = 5x$ $\frac{8}{x} = 4$ $-\frac{5}{3} = 5 + x$ $\frac{x}{1,7} = \pi$

$2 = \frac{5}{x}$ $7 - x = -2$ $-3 = -6 - x$ $-6 = x - 9$

C. Résolutions des équations complexes du 1^er degré :

Définition : Une équation est dite complexe quand elle n'est pas une des 6 équations de base.

1. Méthode sur deux exemples :

Le but est de transformer une équation complexe pour se ramener à une des 6 équations de base.

$5x - 8 = 9$	$-7 - 10x - 5x = 2x + 5$	Méthode :
(rien à réduire)	$-7 - 15x = 2x + 5$	❶ **On a réduit chaque membre.**
$5x = 9 + 8$	$-7 - 5 = 2x + 15x$	❷ **On a « rassemblé » les inconnues** du côté où il y en a **le plus positivement**[3]. Et on « passe » les constantes de l'autre côté.
$5x = 17$	$-12 = 17x$	❸ **On a reréduit chaque membres** pour tomber sur une des 6 équations de base.
$x = \frac{17}{5}$	$-\frac{12}{17} = x$	❹ **On a résolu cette équation de base** en donnant la solution sous la forme la plus simple (entier ou fraction irréductible).

2. Exercices :

Résoudre en colonnes les équations complexes suivantes en 4 étapes maximum !

$2y - 3 = -5$	$-6 = 2 + \frac{y}{5}$	$-7 - 2k = k - 16$	$5x - 8 - 7x = 2x - 12$

[3] **Pas forcément à gauche !** Dans le 2ème ex., il y en a plus à droite car on a +2x à droite alors qu'à gauche on a −10x−5x !

- Résoudre en colonnes les équations complexes suivantes en 5 étapes maximum :

$$2x - \frac{5}{2} = \frac{18}{4}$$

$x = \frac{7}{2}$

$$2y + 5 - 6y - 15 = -2y - 5 + 3y$$

$y = -1$

$$-x + 2 = \frac{-1}{2} + \frac{x}{2}$$

$x = \frac{5}{3}$

$$3x - \frac{5}{3} = -3x + \frac{11}{33}$$

$x = \frac{1}{3}$

$$\frac{x}{3} + 2 + x = 2x - \frac{1}{3}$$

$x = \frac{7}{2}$

$$2(x - 2) = 6 - x - 5$$

On développe d'abord la parenthèse.

$x = \frac{5}{3}$

$$\frac{1}{2}(4x - 8) = 9(\frac{x}{3} + \frac{2}{9})$$

$x = -6$

III. RESOLUTION DE PROBLEMES :

A. Généralités :

Un problème est une situation posée en français, issue de domaines très variés, et où l'on désire connaître la valeur d'une ou plusieurs quantités inconnues.

Exemple : Combien coûte 1 DVD, sachant que j'ai acheté 3 DVD et 1 CD à 15€, que j'ai donné un billet de 100€ et qu'on m'a rendu 25€ ?

Structure d'un problème :

Un énoncé de problème est toujours composé de *2 parties* :

❶ une partie **question(s)**.

❷ une partie **données ou hypothèses** (**tout le reste sauf** la ou les questions).

B. Méthode de résolution des problèmes en 5 étapes :

N°	*Etape*	*Méthode sur notre exemple du haut.*
❶	• **Structure du problème.** Etape qui facilite énormément les étapes ❷ et ❸.	❶ Dans l'énoncé**, soulignez en couleur la ou les questions.**
❷	• **Définitions** ***précises*** **de la (ou les) inconnue(s)** grâce à la (ou les) question(s). • **Restrictions** éventuelles sur la (ou les) inconnue(s). Cette étape facile est souvent mal faite par les élèves qui ne définissent pas **précisément** l'inconnue et **oublient** de donner les **restrictions** sur l'inconnue.	❷ **Définition de l'inconnue et restrictions :** • x = le prix d'un DVD en euros. • $0 < x < 100$ (x est un prix positif et inférieur à 100 d'après les données !)
❸	• **Traduction des égalités cachées dans les données** en une (ou plusieurs) équation(s) faisant intervenir le(s) inconnues définie(s) en ❷. C'est l'étape la plus difficile ! Il faut rechercher dans les données les mots qui signifient des égalités (est de, coûte au total, etc). Il ne faut pas hésiter à écrire des formules en français.	❸ **Traduction mathématique des données :** Prix des 3 DVDs + prix d'1 CD = prix total d'où $3x + 15 = 100 - 25$
❹	• **Résolution mathématique de l'équation.** C'est la phase technique assez facile. Attention aux fautes de signe et de calcul !	(résolvez l'équation) ❹ **Résolution :**
❺	• **Vérification** de la solution en remplaçant la ou les valeur(s) trouvée(s) dans l'équation de départ. • **Réponse en français** à la (ou les) question(s) en s'assurant de la compatibilité des réponses avec les restrictions du ❷. Cette étape ❺ est constamment oubliée par les élèves.	❺ **Vérification et Réponse :** • $3 \times 20 + 15 = 60 + 15 = 75$ $100 - 25 = 75$ • Un DVD coûte 20€. 20€ est bien un prix entre 0 et 100€ et ça a l'air plausible.

C. Problèmes à résoudre :

Exercice ① A chacun le sien !

1) Parmi les problèmes suivants, indiquer ceux pour lesquels la réponse est un nombre x qui vérifie l'équation : $3x + 0,5 = 5$

Problème 1 : Trois paquets de pop-corn et une sucette coûtent ensemble 5 €. La sucette coûte 0,5 €. Combien coûte un paquet de pop-corn ?

Problème 2 : Un kilo de pêches et trois artichauts coûtent 5 €. Un artichaut coûte 0,5 €.
Quel est le prix d'un kilo de pêches ?

Problème 3 : avec trois rouleaux de fil électrique de même longueur, il me manque 0,5m pour poser 5m de fil. Calculer la longueur de fil d'un rouleau.

2) Quelles sont la ou les équations qui conviennent ?

Problème 1 : Avec un billet de 20 €, j'achète trois stylos de même prix, et on me rend 4,70 €.
Quel est le prix d'un stylo ?

Equations : $x + 3 \times 4,70 = 20$ $3x + 4,70 = 20$ $3x - 4,70 = 20$

Problème 2 : Pendant les vacances ma plante verte a grandi de 5 cm. Elle mesure à présent 82 cm.
Combien mesurait-elle avant mon départ ?

Equations : $x + 5 = 82$ $x - 5 = 82$ $82 - x = 5$

Problème 3 : Eric et Aurélie ont 34 bonbons à eux deux. Aurélie en a 10. Et Eric ?

Equations : $34 - 10 = x$ $x + 10 = 34$ $10 - x = 34$

Exercice ② :
Résoudre (en face) les problèmes suivants en appliquant **exactement la méthode en 5 étapes du III p.8**.

1) Maxime a acheté un croissant à 0,90 € et trois chocolatines. Il a dépensé au total 4,20 €.
Quel est le prix d'une chocolatine ?

2) Un rectangle a sa longueur qui mesure 3 cm de plus que la largeur.
Sachant que le périmètre du rectangle est 42 cm, combien mesure la largeur du rectangle ?

3) Pour un abonné, la place de cinéma coûte 5 €, alors qu'une place à plein tarif coûte 8€. La recette totale pour 80 personnes a été de 565€. Combien y avait-il d'abonnés parmi les 80 spectateurs?

IV. CALCUL LITTERAL ET EQUATIONS : REVISIONS.

Exercice ①: développer puis réduire en colonnes :

B = - (3b – 3a) – 21 – 15b – (3 – a)

B = 4a – 18b – 24

C = 4a × 2c – 5c – 4 + 8c – 3c × 5a

C = -7ac + 3c – 4

D = 5b – 6a × 4c + 3 – 7b + 2c × 12a

D = -2b + 3

Exercice ② : factorisation :

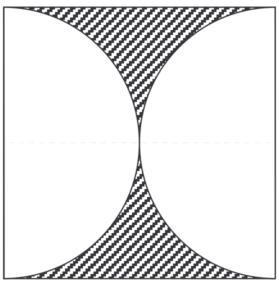
1) factoriser les 2 expressions suivantes :

2t +4p – 6 =

3x – 5xy + xz =

2) Pour calculer l'aire de la partie hachurée sur la figure ci dessous, on utilise la formule :

$$\mathscr{A} = 4a^2 - \pi a^2.$$



1. *Que représente le nombre a ?*
2. *Factoriser la formule de $\mathscr{A}$:* $\mathscr{A} =$
3. *Calculer l'aire $\mathscr{A}$ pour a = 5 cm.* $\mathscr{A} =$

Exercice ③ : vérifier si une valeur est solution d'une équation :

Voici deux équations, ainsi que des réponses proposées comme solutions.
Sans résoudre ces équations, vérifier l'exactitude des solutions proposées.

$x = 26$ pour $2(x-5) = 3(7-x)$	$x = 1$ pour $(x-1)(x+3) - (1-x)(x+4) = x - 1$

Exercice ④ :

Justifier chaque étape de la résolution de l'équation par une règle précise du cours.

Equation 1

$4x - 5 = x - 3$

$4x - x$	=	$-3 + 5$	*On a ajouté ....……..…. aux deux membres de l'équation.*
$3x$	=	2	*On a ....……………………………*
$\mathbf{x}$	=	$\mathbf{2/3}$	*On a divisé les deux membres par ....…………………...*

Equation 2

$$\frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{5}(x+1) = \frac{8}{15}\left(x - \frac{7}{8}\right)$$

$20(x-2) + 3(x+1)$	=	$8\left(x - \frac{7}{8}\right)$	
$20x - 40 + 3x + 3$	=	$8x - 7$	
$23x - 37$	=	$8x - 7$	
$23x - 8x$	=	$-7 + 37$	
$15x$	=	30	
$\mathbf{x}$	=	$\mathbf{2}$	

Exercice ⑤ : Résolvez les 4 équations :

$$t + 5 - 2t = -20 + 4t$$

$t = 5$

$$6 + 2(8 + 6x) - [3(3x + 4)] = 0$$

$x = -\frac{10}{3}$

$$5x - 19 = 24x - (3x + 13)$$

$x = -\frac{3}{8}$

$$\frac{1}{2}(2x - 4) = x - (-x + 4)$$

$x = 2$

Exercice ⑥ résoudre méthodiquement (!) les problèmes suivants :

- L'aire d'un champ rectangulaire est de 1200 m² et de 25 m de large. Le propriétaire décide de planter du manioc sur 75% de la longueur total du champ. Quelle est la longueur de la partie réservée au manioc ?

- Après avoir dépensé les trois cinquièmes de mes économies, il me reste finalement 62 €.

A combien se montaient mes économies?