COSINUS D'UN ANGLE AIGU.

"Si on fait étudier les Mathématiques aux enfants, c'est moins pour enseigner des vérités que pour discipliner l'Esprit, sa pratique étant sensée donner et développer l'habitude du raisonnement rigoureux." *Blanché, « L' axiomatique ».*

Nom et prénom : ……………………………………………..

Vous aurez besoin de votre calculatrice scientifique pour ce cours.

<u>Introduction :</u>

Dans le programme de géométrie de $4^{ème}$, une grande partie est réservée à l'étude du triangle rectangle :

- Cercle et triangle rectangle : « Triangle rectangle et cercle …………………………. »
- Relation entre les 3 longueurs d'un triangle rectangle : « Théorême de ……………………. »

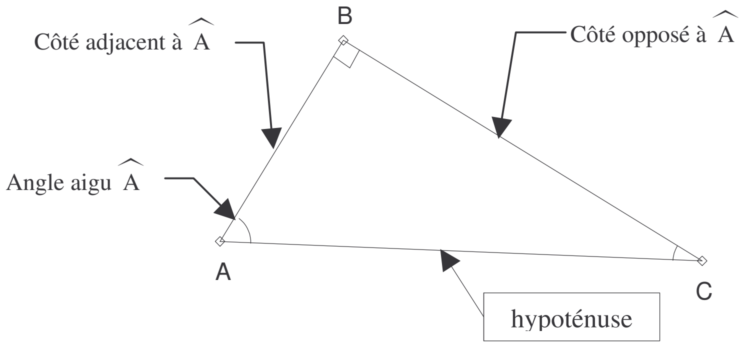
Il reste à étudier les relations qu'il peut exister entre les angles et les longueurs d'un triangle rectangle.

I. RAPPELS SUR LE TRIANGLE RECTANGLE.

Le plus grand côté d'un triangle rectangle s'appelle l'…………………………………

Le triangle rectangle possède :

- ….. angle droit.
- …… angles aigus complémentaires : la somme de leurs mesures est de …….°



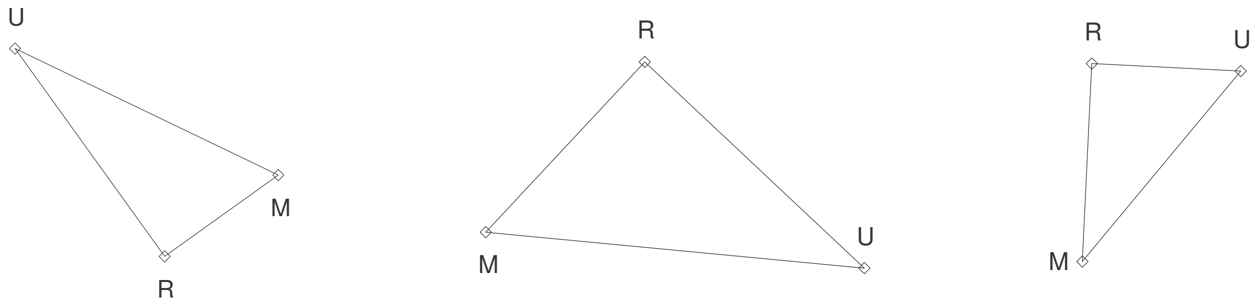
Dans un triangle rectangle :

- On appelle **côté adjacent à un angle AIGU** le côté de l'angle aigu qui n'est pas l'hypoténuse.
- On appelle **côté opposé à un angle AIGU** le $3^{ème}$ côté du triangle rectangle qui n'est ni l'hypoténuse, ni le côté adjacent à cet angle aigu (c'est en fait **le côté « en face » de l'angle aigu**).

- <u>Exercice</u> :

Voici 3 triangles rectangles MUR. Rajouter le codage manquant.

Puis repasser *en bleu* l'hypoténuse, *en rouge* le côté adjacent à $\widehat{M}$, *en vert* le côté adjacent à $\widehat{U}$



Seulement pour le dernier triangle, repassez d'une quatrième couleur le côté opposé à $\widehat{M}$.

Que constatez vous ? ………………………………………………………………………..

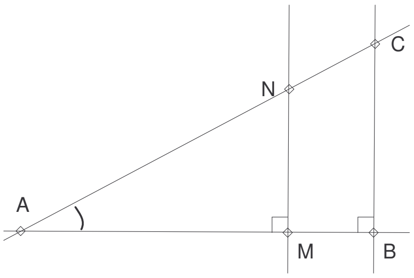
Compléter :

« Dans un triangle rectangle, le côté adjacent d'un angle aigu et le coté ……………………. de l'angle aigu complémentaire sont ………………………. »

- Maintenant que le décor est planté, nous allons découvrir la suite du film avec l'entrée en scène d'un rapport de longueur pas comme les autres.

II. DECOUVERTE DU COSINUS.

❶ Commençons en douceur :



Quelle configuration reconnaît-on ? ……………………………

Qu'a-t-elle de particulier ici ? ………………………………………

Comment sont les longueurs de ANM et ABC ? ……………………

Complétez :

Puisque $\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{cases}$ alors, d'après le théorème ………………, $\dfrac{AM}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{AC} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Intéressons nous à la première égalité : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ Transformons la un peu.

Par produit en croix, on obtient : $AM \times \ldots\ldots = \ldots\ldots \times AB$

D'où : $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{\ldots\ldots}$

Que représentent AN et AC pour respectivement les triangles AMN et ABC ? Les longueurs de l' …………………………

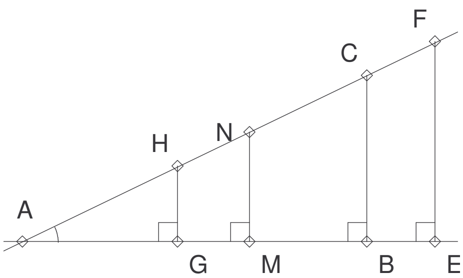
Que représentent AM et AB dans respectivement AMN et ABC ? Les longueurs du côté ……………………..….. à l'angle $\widehat{A}$.

Ainsi, la dernière égalité peut s'énoncer de la façon suivante :

Le rapport $\dfrac{\textbf{Longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\textbf{Longueur de l'hypoténuse}}$ est le même dans les 2 triangles rectangles AMN et ABC.

➢ Cela ne fonctionne peut être pas avec des triangles « plus grands ou plus petits » ? Voyons cela.

Complétons la figure de départ avec 2 autres triangles rectangles : un triangle AEF « plus grand » et un triangle AGH « plus petit » que ABC, et débarrassons nous des morceaux parasites.



L'angle $\widehat{A}$ a-t-il même mesure dans chacun des 4 triangles rectangles ? …….

Par un raisonnement similaire à celui du dessus (qui s'appuie sur le théorème de ………………………), on peut écrire :

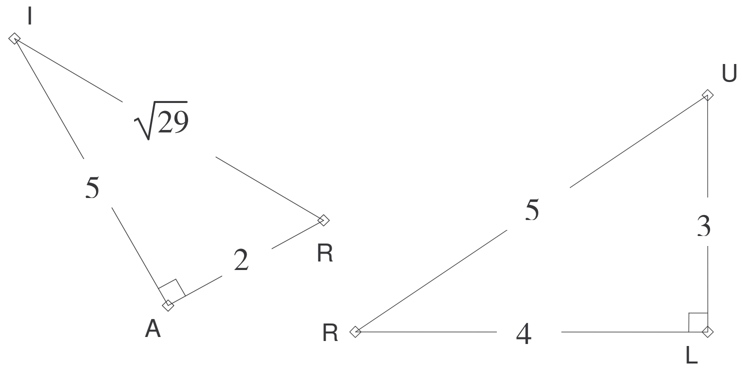
$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{AG}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{AF}$$

D'après cette dernière relation, le rapport $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$ changera-t-il pour un triangle rectangle semblable à ABC (agrandissement ou réduction de ABC, peu importe l'orientation) ? Evidemment que ………. ! En conclusion :

« Pour des triangles rectangles *semblables*, le rapport $\dfrac{\textbf{Longueur du côté adjacent à } \widehat{A}}{\textbf{Longueur de l'hypoténuse}}$ est le ……… »

Toujours pas de Cosinus ? Patience, ça vient…

❷ Maintenant, que se passe-t-il pour des triangles rectangles qui ne sont pas semblables ?



Voici 2 triangles rectangles AIR et URL.

Les mesures de $\widehat{R}$ sont elles les mêmes ? …….

Puisque les mesures de $\widehat{R}$ ne sont pas égales, les 2 triangles ne peuvent pas être semblables !

Pour chaque triangle, calculons le rapport $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{R}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$:

Dans le triangle AIR rectangle en ……,

$\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{R}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}} = \dfrac{RA}{RI} = \dots\dots$

Dans le triangle URL rectangle en …..,

$\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{R}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$

Les deux rapports sont-ils égaux ? Evidemment que ………

En conclusion :

« Lorsque l'angle aigu $\widehat{R}$ change de mesure (autrement dit lorsque les triangles rectangles sont *dissemblables*), le rapport $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à } \widehat{R}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$ change. »

❸ Finalement, des 2 activités qui précèdent, on peut affirmer :

« Pour l'ensemble des triangles rectangles, le rapport $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à un angle aigu}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$ est remarquable et ne dépend que de la mesure de l'angle aigu considéré. »

On a donné un nom de savant fou à ce rapport remarquable : **le Cosinus.**

III. COSINUS D'UN ANGLE AIGU.

Grâce à l'activité précédente (voir aussi act.1 p.226), on a remarqué que :

- Pour deux triangles *rectangles* différents mais ayant leurs angles aigus de même mesure (on parle de triangles semblables), le quotient $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à un angle aigu}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$ était le même !
- Autrement dit, ce rapport ne dépend pas des longueurs des côtés de l'angle aigu du triangle rectangle.

La valeur de ce rapport dépend seulement de la mesure de cet angle aigu !

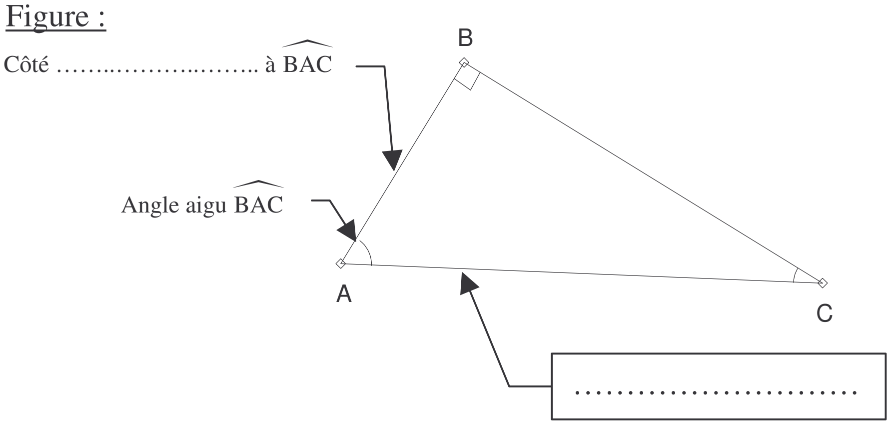
A. Définition et notation :

Dans un triangle rectangle, on appelle cosinus d'un angle aigu le rapport suivant :

- Définition :

$$\text{Cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{Longueur du côté ……………………. à cet angle aigu}}{\text{Longueur de l'……………………….}}$$

- Notation : Le cosinus d'un angle aigu $\widehat{ABC}$ se note : **cos($\widehat{ABC}$)**
- Figure :

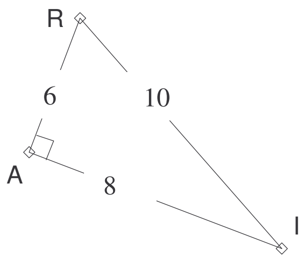


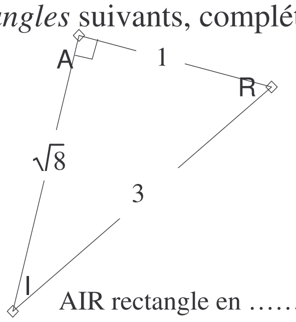
Ici, on a :

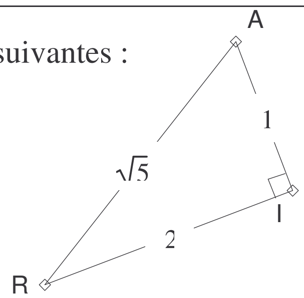
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{…..}{…..}$

$\cos(\text{……..}) = \dfrac{CB}{CA}$

- Exercice ① : Dans les triangles *rectangles* suivants, compléter les égalité suivantes :







Dans AIR rectangle en A, on a :

$\cos(\widehat{RIA}) = \dfrac{…..}{…..}$

$= \dfrac{…..}{…..}$

Dans AIR rectangle en ……., on a :

$\cos(\text{………}) = \dfrac{AI}{IR}$

$= \dfrac{…..}{…..}$

Dans AIR rectangle en ……, on a :

$\cos(\text{……….}) = \dfrac{…..}{…..}$

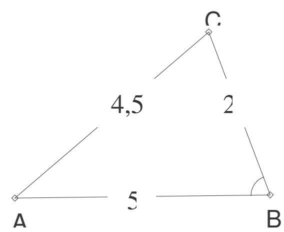
$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

- Exercice ② :

Que pensez vous du calcul suivant ?

$\text{Cos}(\widehat{CBA}) = \dfrac{BC}{BA}$

$= \dfrac{2}{5}$



- Exercice ③ : construire (en face !) un triangle ABC rectangle en A tel que : $\cos(\widehat{ABC}) = 0{,}5$.

B. Propriétés du cosinus d'un angle aigu :

Analysons la formule :

$$\text{Cosinus d'un angle} \ldots\ldots\ldots = \frac{\text{Longueur du côté} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ à cet angle aigu}}{\text{Longueur de l'}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

➢ Puisque le cosinus est un quotient de 2 longueurs (positives !), alors le cosinus d'un angle aigu est un nombre SANS UNITE, de signe ……………..

➢ Puisque la longueur de l'hypoténuse est plus ……………… que la longueur du côté adjacent, alors le cosinus est un nombre plus …………… que 1 !

En résumé :

Dans un triangle rectangle, quelque soit l' angle aigu $\widehat{ABC}$, son cosinus est un **nombre** :

❶ sans unité.

❷ positif.

❸ $0 < \cos(\widehat{ABC}) < 1$

C. 4 remarques sur le cosinus d'un angle aigu :

1. Ce n'est pas un angle !

On parle de cosinus d'un angle aigu **mais le cosinus n'est pas un angle ! Encore moins une longueur ! Cette confusion est souvent faite par les élèves.**

Le cosinus est un ……………………, sans unité, compris entre 0 et 1.

Le cosinus d'un angle aigu donne une information numérique sur cet angle aigu du triangle rectangle, de la même façon que le numéro d'un journal donne une information sur un journal, mais ce journal ne se réduit pas à son numéro.

2. Table numérique des cosinus :

➢ Puisque le cosinus d'un angle aigu ne dépend que de la ………………… de cet angle aigu, les mathématiciens ont petit à petit au fil de l'histoire, en utilisant parfois des techniques numériques sophistiquées, construit une table de correspondance entre la mesure de l'angle aigu et la valeur du cosinus.

Rassurez vous, vous n'aurez pas à retenir par cœur comme vos grands parents cette table !

Elle a été implantée dans la mémoire de votre calculatrice scientifique :

➢ Assurez vous d'abord que votre calculatrice est en **mode « degré »** (touche DRG ou MODE).

Puis remplissez ce tableau en utilisant la touche COS de votre calculatrice.

Mesure de l'angle aigu	10°	20°	60°	80°
Valeur du cosinus correspondant (arrondie au millième)	≈ 0,985	≈	=	

➢ Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? ……….. !

Erreur classique des élèves de croire que le cosinus est proportionnel à la mesure de l'angle aigu !

Ex : on a $\cos(60°) = 0,5$ mais $\cos(2 \times 60°) \neq 2 \times 0,5$

3. Deux valeurs particulières :

Et pour les angles obtus ? Pour l'angle nul ? Pour l'angle droit ?

Il n'y a pas d'angle obtus dans un triangle rectangle. On ne pourra pas définir le cosinus d'un angle obtus comme quotient. En classe de 2^{de} , le cosinus sera défini comme l'abscisse d'un point qui se ballade sur un cercle de centre l'Origine du repère, et de rayon 1.

Par définition, et par cohérence avec la classe de 2^{de} , on donne :

au cosinus d'un angle nul la valeur 1 : **Cos(…..°) = 1**

au cosinus d'un angle droit la valeur 0 : **Cos(…..°) = ……**

4. Trigonométrie :

➢ A quoi peut bien servir le côté opposé donné en rappels (figure p.2) ?

Si dans $\dfrac{\text{Longueur du côté adjacent à un angle aigu}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$, on remplaçait le côté adjacent par le côté opposé ?

On obtient un autre rapport remarquable : $\dfrac{\text{Longueur du côté opposé à un angle aigu}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$. C'est **le Sinus !**

Lui aussi ne dépend que de la mesure de l'angle aigu. Il sera vu en **classe de $3^{ème}$.**

En fait, le sinus et le cosinus font partie d'une branche des Mathématiques : **la Trigonométrie.**

➢ Le mot **«Trigonométrie»** vient du grec et signifie « mesure des triangles ». C'est donc l'art de mesurer les angles.

L'astronome grec Hipparque qui a vécu au II^e siècle avant J.C, **a fondé la Trigonométrie** et a calculé les premières tables trigonométriques (calculs de sinus, cosinus et tangente d'un angle) dans le but de prédire des phénomènes astronomiques réguliers. Il a mis au point une méthode pour mesurer le rapport des distances entre la Terre, la Lune et le Soleil.

Au V^e siècle, les indiens calculaient le sinus de corde ou de demi-corde dans un cercle, au lieu de sinus d'angle. Le nom indien donné à la demi-corde deviendra le mot « sinus » (créé au Xve siècle par un allemand, traduit du mot sanscrit « jiva » signifiant « corde d'arc ») après avoir été traduit en arabe, puis en latin.

Les sinus et cosinus auront leur notation actuelle (sin et cos) au XVIIème siècle.

➢ La Trigonométrie est utilisée pour l'arpentage, la navigation, l'aviation, en électricité (l'intensité du courant alternatif est exprimée à l'aide du sinus), et dans la modélisation de phénomènes ondulatoires.

Nous allons maintenant voir concrètement comment on peut utiliser le cosinus dans un triangle rectangle.

Dans un **triangle rectangle**, Cos (angle aigu) $= \dfrac{\text{longueur du ………………………………… à cet angle aigu}}{\text{longueur de ………………………………………}}$

En regardant bien cette égalité, on voit que c'est une relation liant 2 longueurs d'un triangle rectangle (dont l'hypoténuse) et un des deux angles aigus de ce triangle.

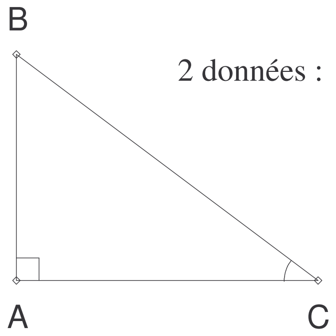
Cette égalité pourra donc permettre de trouver soit :

- Une des deux longueurs de l'angle aigu sachant : l'autre longueur et la mesure de l'angle aigu en degré.
- La mesure de l'angle aigu en degré sachant : la longueur de l'hypoténuse et la longueur du côté adjacent.

IV. TROUVER UNE LONGUEUR INCONNUE :

Soit un triangle ABC *rectangle* dont on connaît la mesure d'un angle aigu et la longueur d'un des deux côtés de cet angle aigu.
On veut connaître la longueur du côté adjacent à cet angle aigu.

Exemple ❶ :



2 données : $\widehat{ACB} = 30°$
$BC = 5$ cm

On cherche la longueur AC du côté adjacent (valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$).

Méthode ❶: longueur du côté adjacent (4 étapes).

① **On reporte sur la figure les données et on place un point d'interrogation à la place de la longueur inconnue.**

② **On écrit la relation liant $\widehat{ACB}$, AC et BC :**
Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CA}{CB}$$

③ **On remplace les quantités connues par leur valeur :**

$$\cos(30°) = \frac{CA}{5}$$

④ **On résout l'équation :**

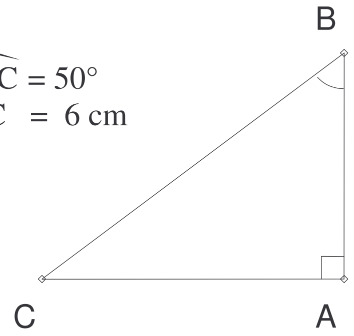
$5 \times \cos(30°) = CA \longrightarrow$ valeur exacte de CA.

d'où, en utilisant la touche $\boxed{\text{cos}}$ de la calculatrice :

$CA \approx 4{,}33$ cm $\longrightarrow$ valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$
(remarque : on a bien CA < hypoténuse)

Exercice :

2 données : $\widehat{ABC} = 50°$
$BC = 6$ cm



Déterminer la longueur BA (valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$).

Méthode

BA ≈ 3,86 cm

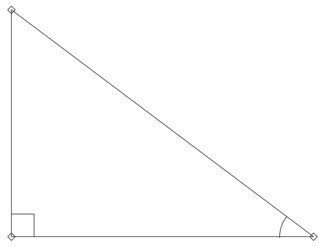
Exercice :
Soit ABC rectangle en B.

2 données : $\widehat{ACB} = 20°$ et $AC = 7$ cm.
Déterminer CB (valeur exacte puis valeur arrondie au $10^{\text{ème}}$).
Faites un croquis et reportez les données !

Méthode

BC ≈ 6,6 cm

Exemple ❷ :

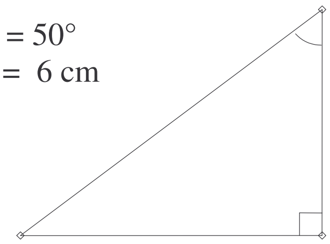


2 données : $\widehat{ACB} = 30°$
$AC = 5$ cm

On cherche la longueur BC de l'hypoténuse (valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{ème}$).

Exercice :

2 données : $\widehat{ABC} = 50°$
$AB = 6$ cm



Déterminer la longueur BC (valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{ème}$).

Exercice :
Soit ABC rectangle **en C**.

2 données : $\widehat{ABC} = 20°$ et $BC = 7$ cm.

Déterminer BA (valeur exacte puis valeur arrondie au $10^{ème}$).

Faites un croquis et reportez les données !

Méthode ❷ : longueur de l'hypoténuse (4 étapes).

① On reporte sur la figure les données et on place un point d'interrogation à la place de la quantité inconnue.

② On écrit la relation liant $\widehat{ACB}$, AC et BC :
Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CA}{CB}$$

③ On remplace les quantités connues par leur valeur :

$$\cos(30°) = \frac{5}{CB}$$

④ On résout l'équation :

$$CB = \frac{5}{\cos(30°)} \longrightarrow \text{valeur exacte de BC}$$

d'où, en utilisant la touche $\boxed{\cos}$ de la calculatrice :

$$CB \approx 5{,}75 \text{ cm} \longrightarrow \text{valeur arrondie au } 100^{ème}$$

(remarque : on a bien l'hypoténuse BC > AC)

Méthode

BC ≈ 9,33 cm

Méthode

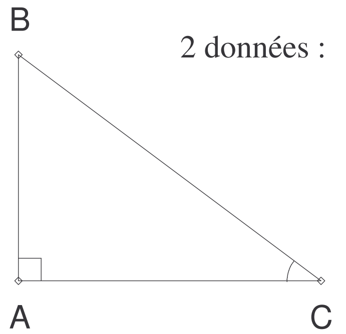
BA ≈ 7,5 cm

V. TROUVER LA MESURE INCONNUE D'UN ANGLE AIGU :

Soit un triangle ABC ***rectangle*** dont on connaît les longueurs des deux côtés d'un angle aigu.

On veut connaître la mesure de cet angle aigu.

Exemple ❸ :



2 données : AC = 3 cm
BC = 5 cm

On cherche la mesure de $\widehat{ACB}$ (valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$) en degrés.

Méthode ❸ : mesure de l'angle aigu (4 étapes).

① On reporte sur la figure les données et on place un point d'interrogation à la place de la quantité inconnue.

② On écrit la relation liant $\widehat{ACB}$, AC et BC :

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CA}{CB}$$

③ On remplace les quantités connues par leur valeur :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{3}{5}$$

④ On résout l'équation :

donc $\widehat{ACB} = \cos^{-1}(\frac{3}{5})$ ⟶ valeur exacte de $\widehat{ABC}$.

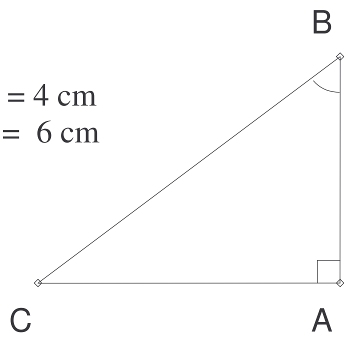
d'où, en utilisant la touche **$\cos^{-1}$ ou acs** de la calculette :

$\widehat{ACB} \approx 53{,}13°$ ⟶ valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$

(remarque : on a bien $\widehat{ACB} < 90°$)

Exercice :

2 données : BA = 4 cm
BC = 6 cm



Déterminer en degré la mesure de $\widehat{CBA}$.
(valeur exacte puis valeur arrondie au $100^{\text{ème}}$).

Méthode

$\widehat{CBA} \approx 48{,}19°$

Exercice :

Soit ABC rectangle **en B.**

2 données : CB = 3 cm et CA = 7 cm

Déterminer en degré la mesure de $\widehat{ACB}$

(valeur exacte puis valeur arrondie à l'unité).

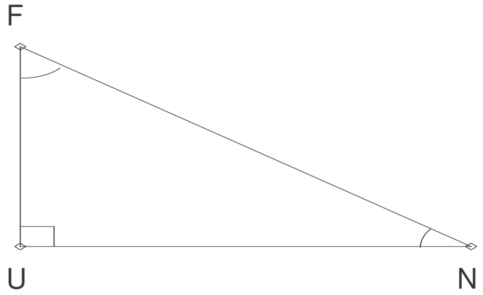
Faites un croquis et reportez les données !

Méthode

$\widehat{ACB} \approx 65°$

VI. EXERCICES

➢ Exercice ① :

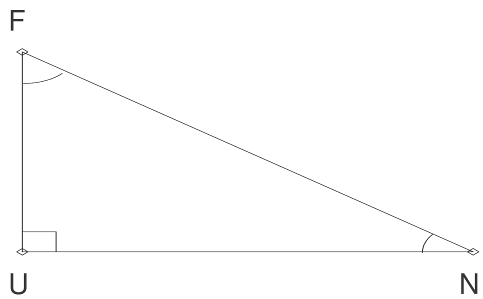


Compléter le tableau suivant :

Lorsqu'on connaît :	on peut trouver :	par la méthode (cos ou $\cos^{-1}$ ou Pythagore) :
Exemple FU et FN	• $\widehat{UFN}$ • UN	• $\cos^{-1}$ • Pythagore
FU et NU		
NU et $\widehat{UNF}$		
	$\widehat{UNF}$	$\cos^{-1}$
FN et ……		Pythagore
Attention ! FN et $\widehat{FUN}$		
……. et $\widehat{UNF}$	UN	

➢ Exercice ② : (à faire en face)

Sur la figure ci contre, on sait que FU = 6 et UN = 8.



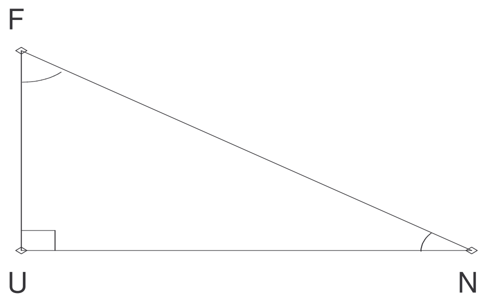
- Que faudrait-il d'abord calculer avant de trouver $\widehat{FNU}$ et $\widehat{NFU}$? ………..

Calculer cette quantité.

- Calculer les valeurs approchées au 10ème de $\widehat{FNU}$ et $\widehat{NFU}$

$\widehat{FNU} \approx 36{,}9°$ et $\widehat{NFU} \approx 53{,}1°$

➢ Exercice ③ : (à faire en face)



Sur la figure ci contre, on sait que FU = 3 et $\widehat{UFN} = 50°$.

- Que faudrait-il d'abord calculer avant de trouver UN ? ………

Calculer cette quantité.

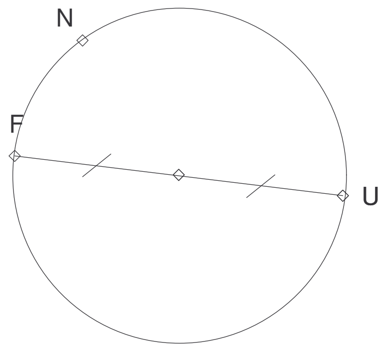
- Quelles sont les deux méthodes qui permettent maintenant de trouver UN ? ……………………………………………

Calculer un arrondi au 100ème de UN par ces 2 méthodes et comparer les 2 résultats.

- Pourquoi les deux résultats ne sont ils pas exactement identiques ?

UN ≈ 3,58 cm

- <u>Exercice ④ :</u>



Sur la figure(inexacte) ci contre, le cercle est de rayon 2 et $\widehat{FUN} = 20°$.
Il s'agit de calculer UN puis FN.

1. Peut on se lancer tout de suite dans les cosinus ? ……
Que faut il d'abord montrer ? …………………………………..

2. Calculer maintenant UN ; puis calculer une valeur approchée au 1/10ème de FN sans utiliser la trigo.

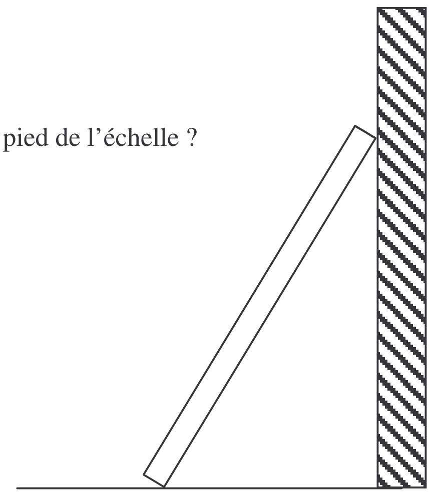
- <u>Exercice ⑤ :</u>

Une échelle est utilisable en toute sécurité si elle fait un angle compris entre 10° et 30° avec la verticale.

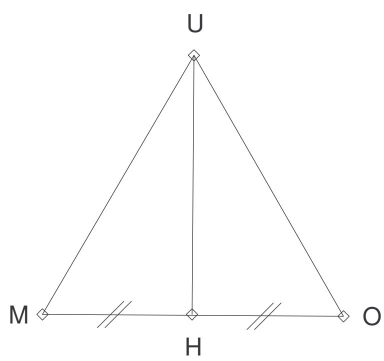
On pose une échelle de 5 m contre un mur.

Placez les données sur la figure.

1. L'échelle est elle utilisable si son pied est à 1,5m du mur ?
2. Quelles doivent être les distances minimale et maximale entre le pied du mur et le pied de l'échelle ?



- <u>Exercice ⑥ : Cosinus d'angles particuliers.</u>



Soit le triangle équilatéral UMO de longueur 4 cm.

1. Montrer que (UH) est perpendiculaire à (MO).
2. En utilisant Pythagore, calculer la valeur exacte de UH.
3. Calculer la valeur exacte de cos ($\widehat{UMH}$).
4. Calculer la valeur exacte de cos ($\widehat{MUH}$).

<u>Note</u> : on retiendra ces deux valeurs remarquables du cosinus : **cos(….°) = 0,5 et cos(…..°) =** $\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$